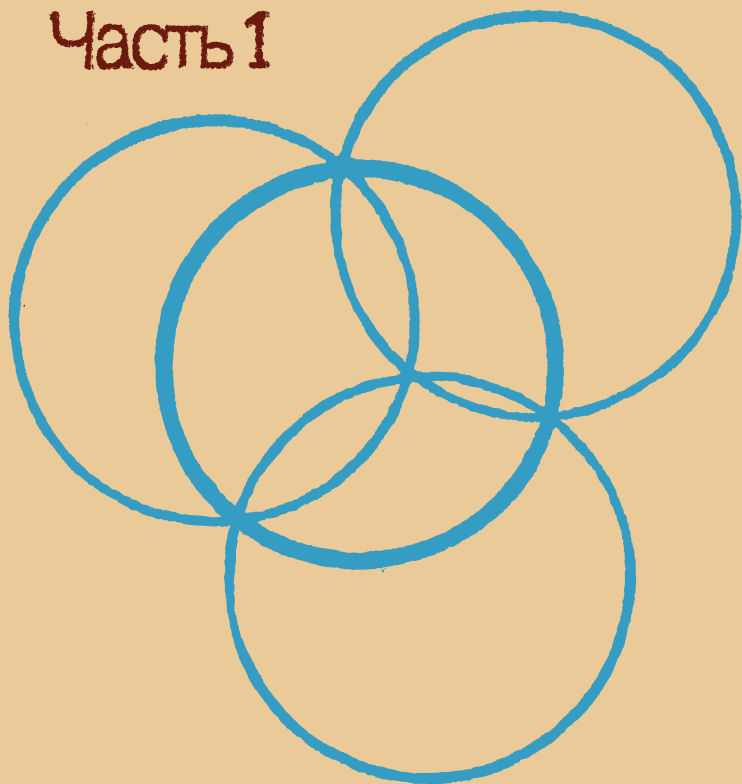


В.В.Прасолов

# ЗАДАЧИ по планиметрии

---

Часть 1



БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

ВЫПУСК 15

---

В. В. ПРАСОЛОВ

# ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ЧАСТЬ 1

Издание второе,  
переработанное и дополненное



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1991

ББК 22.151.0  
П70  
УДК 514.112

Серия «Библиотека математического кружка»  
издается с 1950 года

Рецензент доктор физико-математических наук профессор  
Э. Г. Позняк

**Прасолов В. В.**

П70      Задачи по планиметрии. Ч. 1.—2-е изд., перераб. и доп.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.—320 с.—(Б-ка мат. кружка. Вып. 15).  
ISBN 5-02-014642-0 (Ч. 1)

Включены нестандартные геометрические задачи несколько повышенного по сравнению со школьными задачами уровня. Сборник выходит в двух частях. Для второго издания (1-е изд.—1986 г.) книга существенно переработана: добавлены новые задачи, принята подробная рубрикация по методам решения геометрических задач. В часть 1 вошли задачи по классическим (школьным) разделам планиметрии. Часть 1 содержит почти 1000 задач с полными решениями и более 100 задач для самостоятельного решения.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов пединститутов.  
Ил. 142.

П  $\frac{1602050000-063}{053(02)-91}$  27-91

ББК 22.151.0

ISBN 5-02-014642-0 (Ч. 1)

© «Наука». Физматлит, 1986;  
с изменениями, 1991

ISBN 5-02-014641-2

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Предисловие</b> .....   | <b>7</b>  |
| <b>Глава 1. Подобные треугольники</b> .....                          | <b>9</b>  |
| § 1. Отрезки, заключенные между параллельными прямыми .....          | 10        |
| § 2. Отношение сторон подобных треугольников .....                   | 11        |
| § 3. Отношение площадей подобных треугольников .....                 | 13        |
| § 4. Вспомогательные равные треугольники .....                       | 14        |
| § 5. Треугольник, образованный основаниями высот .....               | 15        |
| § 6. Подобные фигуры .....   | 16        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                            | 17        |
| Решения .....  | 18        |
| <b>Глава 2. Вписанный угол</b> .....                                 | <b>30</b> |
| § 1. Углы, опирающиеся на равные дуги .....                          | 31        |
| § 2. Величина угла между двумя хордами .....                         | 32        |
| § 3. Угол между касательной и хордой .....                           | 33        |
| § 4. Связь величины угла с длиной дуги и хорды .....                 | 34        |
| § 5. Четыре точки, лежащие на одной окружности .....                 | 35        |
| § 6. Вписанный угол и подобные треугольники .....                    | 36        |
| § 7. Биссектриса делит дугу пополам .....                            | 38        |
| § 8. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями ..... | 38        |
| § 9. Три описанные окружности пересекаются в одной точке .....       | 39        |
| § 10. Точка Микеля .....   | 40        |
| § 11. Разные задачи .....  | 40        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                            | 41        |
| Решения .....  | 42        |
| <b>Глава 3. Окружности</b> .....                                     | <b>57</b> |
| § 1. Касательные к окружностям .....                                 | 58        |
| § 2. Произведение длин отрезков хорд .....                           | 59        |
| § 3. Касающиеся окружности .....                                     | 60        |
| § 4. Три окружности одного радиуса .....                             | 61        |
| § 5. Две касательные, проведенные из одной точки .....               | 62        |
| § 6. Применение теоремы о высотах треугольника .....                 | 63        |
| § 7. Площади криволинейных фигур .....                               | 63        |
| § 8. Окружности, вписанные в сегмент .....                           | 64        |
| § 9. Разные задачи .....   | 65        |
| § 10. Радикальная ось .....  | 65        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                            | 67        |
| Решения .....  | 68        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 4. Площадь</b> .....  | <b>82</b>  |
| § 1. Медиана делит площадь пополам .....                                 | 83         |
| § 2. Вычисление площадей .....   | 83         |
| § 3. Площади треугольников, на которые разбит четырех-<br>угольник ..... | 84         |
| § 4. Площади частей, на которые разбит четырехугольник .....             | 85         |
| § 5. Разные задачи .....   | 86         |
| § 6. Прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие<br>части .....      | 87         |
| § 7. Формулы для площади четырехугольника .....                          | 88         |
| § 8. Вспомогательная площадь .....                                       | 88         |
| § 9. Перегруппировка площадей .....                                      | 90         |
| Задачи для самостоятельного решения .....                                | 91         |
| Решения .....  | 92         |
| <b>Глава 5. Треугольники</b> .....                                       | <b>104</b> |
| § 1. Вписанная и описанная окружности .....                              | 105        |
| § 2. Прямоугольные треугольники .....                                    | 106        |
| § 3. Правильный треугольник .....  | 107        |
| § 4. Треугольники с углами $60^\circ$ и $120^\circ$ .....                | 108        |
| § 5. Целочисленные треугольники .....                                    | 108        |
| § 6. Разные задачи .....   | 109        |
| § 7. Теорема Менелая .....   | 111        |
| § 8. Теорема Чевы .....  | 113        |
| § 9. Прямая Симсона .....  | 116        |
| § 10. Подерный треугольник .....   | 117        |
| § 11. Прямая Эйлера и окружность девяти точек .....                      | 118        |
| § 12. Точки Брокера .....  | 119        |
| § 13. Точка Лемуана .....  | 121        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                                | 122        |
| Решения .....  | 123        |
| <b>Глава 6. Многоугольники</b> .....                                     | <b>150</b> |
| § 1. Вписанные и описанные четырехугольники .....                        | 150        |
| § 2. Четырехугольники .....  | 152        |
| § 3. Теорема Птолемея .....  | 154        |
| § 4. Пятиугольники .....   | 155        |
| § 5. Шестиугольники .....  | 155        |
| § 6. Правильные многоугольники .....                                     | 156        |
| § 7. Вписанные и описанные многоугольники .....                          | 159        |
| § 8. Произвольные выпуклые многоугольники .....                          | 160        |
| § 9. Теорема Паскаля .....   | 160        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                                | 161        |
| Решения .....  | 162        |
| <b>Глава 7. Геометрические места точек</b> .....                         | <b>184</b> |
| § 1. ГМТ — прямая или отрезок .....                                      | 185        |
| § 2. ГМТ — окружность или дуга окружности .....                          | 185        |
| § 3. Вписанный угол .....  | 186        |
| § 4. Вспомогательные равные треугольники .....                           | 187        |
| § 5. Гомотетия .....   | 187        |
| § 6. Метод ГМТ .....   | 187        |
| § 7. ГМТ с ненулевой площадью .....                                      | 188        |
| § 8. Теорема Карно .....   | 188        |
| § 9. Окружность Ферма — Аполлония .....                                  | 189        |

|  |            |
|--|------------|
| Задачи для самостоятельного решения .....  | 190        |
| Решения .....  | 191        |
| <b>Глава 8. Построения .....</b>   | <b>200</b> |
| § 1. Метод геометрических мест точек .....                                       | 201        |
| § 2. Вписанный угол .....  | 201        |
| § 3. Подобные треугольники и гомотетия .....                                     | 201        |
| § 4. Построение треугольников по различным элементам .....                       | 202        |
| § 5. Построение треугольников по различным точкам .....                          | 202        |
| § 6. Треугольник .....   | 203        |
| § 7. Четырехугольники .....  | 203        |
| § 8. Окружности .....  | 204        |
| § 9. Окружность Аполлония .....  | 204        |
| § 10. Разные задачи .....  | 205        |
| § 11. Необычные построения .....   | 205        |
| § 12. Построения одной линейкой .....  | 206        |
| § 13. Построения с помощью двусторонней линейки .....                            | 207        |
| § 14. Построения с помощью прямого угла .....                                    | 207        |
| Задачи для самостоятельного решения .....  | 208        |
| Решения .....  | 208        |
| <b>Глава 9. Геометрические неравенства .....</b>                                 | <b>227</b> |
| § 1. Медиана треугольника .....  | 228        |
| § 2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника .....                     | 228        |
| § 3. Сумма длин диагоналей четырехугольника .....                                | 229        |
| § 4. Разные задачи на неравенство треугольника .....                             | 229        |
| § 5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон ..... | 230        |
| § 6. Неравенства с площадями .....   | 230        |
| § 7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой .....                              | 232        |
| § 8. Ломаные внутри квадрата .....   | 233        |
| § 9. Четырехугольник .....   | 233        |
| § 10. Многоугольники .....   | 234        |
| § 11. Разные задачи .....  | 236        |
| Задачи для самостоятельного решения .....  | 236        |
| Приложение. Некоторые неравенства .....  | 237        |
| Решения .....  | 238        |
| <b>Глава 10. Неравенства для элементов треугольника .....</b>                    | <b>261</b> |
| § 1. Медианы .....   | 261        |
| § 2. Высоты .....  | 261        |
| § 3. Биссектрисы .....   | 262        |
| § 4. Длины сторон .....  | 262        |
| § 5. Радиусы описанной, вписанной и невписанных окружностей .....                | 262        |
| § 6. Симметричные неравенства для углов треугольника .....                       | 262        |
| § 7. Неравенства для углов треугольника .....                                    | 263        |
| § 8. Неравенства для площади треугольника .....                                  | 264        |
| § 9. Против большей стороны лежит больший угол .....                             | 264        |
| § 10. Отрезок внутри треугольника меньше наибольшей стороны .....                | 265        |
| § 11. Неравенства для прямоугольных треугольников .....                          | 265        |
| § 12. Неравенства для остроугольных треугольников .....                          | 266        |
| § 13. Неравенства в треугольниках .....  | 266        |

|   |            |
|---|------------|
| Задачи для самостоятельного решения .....                               | 267        |
| Решения .....   | 268        |
| <b>Глава 11. Задачи на максимум и минимум .....</b>                     | <b>282</b> |
| § 1. Треугольник .....  | 282        |
| § 2. Экстремальные точки треугольника .....                             | 284        |
| § 3. Угол .....   | 284        |
| § 4. Четырехугольник .....  | 285        |
| § 5. Многоугольники .....   | 285        |
| § 6. Разные задачи .....  | 286        |
| § 7. Экстремальные свойства правильных многоугольников .....            | 287        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                               | 287        |
| Решения .....   | 288        |
| <b>Глава 12. Вычисления и метрические соотношения .....</b>             | <b>301</b> |
| § 1. Теорема синусов .....  | 301        |
| § 2. Теорема косинусов .....  | 302        |
| § 3. Вписанная, описанная и невписанная окружности;<br>их радиусы ..... | 303        |
| § 4. Длины сторон, высоты, биссектрисы .....                            | 303        |
| § 5. Синусы и косинусы углов треугольника .....                         | 304        |
| § 6. Тангенсы и котангенсы углов треугольника .....                     | 304        |
| § 7. Вычисление углов .....   | 305        |
| § 8. Окружности .....   | 306        |
| § 9. Разные задачи .....  | 307        |
| § 10. Метод координат .....   | 308        |
| Задачи для самостоятельного решения .....                               | 308        |
| Решения .....   | 309        |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Настоящий сборник задач предназначен для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов педагогических институтов и всех, кто увлекается решением задач по элементарной геометрии. Он состоит из нестандартных геометрических задач несколько повышенного по сравнению с обычными школьными задачами уровня. В сборник включены в основном задачи, предлагавшиеся в разное время на математических олимпиадах разного ранга, задачи из архивов математических олимпиад и математических кружков.

При подготовке второго издания книга была существенно переработана: решения многих задач написаны заново, добавлено около 600 новых задач; особенно много задач добавлено по геометрии треугольника. При этом большое влияние на меня оказало второе издание книги И. Ф. Шарыгина<sup>1)</sup> и замечательная, незаслуженно забытая книга Д. Ефремова<sup>2)</sup>.

Сборник выходит в двух частях. В ч. 1 включены классические темы планиметрии, а в ч. 2 войдут более современные темы: геометрические преобразования и задачи на олимпиадную и кружковую тематику (разрезания, раскраски, принцип Дирихле, индукция и т. д.). Часть 1 содержит почти 1000 задач с полными решениями и более 100 задач для самостоятельного решения.

---

<sup>1)</sup> Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986.

<sup>2)</sup> Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. Одесса: Матезис, 1902.



Книгу можно использовать не только как источник задач для внеклассной работы, но и как пособие для самостоятельного изучения геометрии. Для удобства читателя принята подробная рубрикация. Задачи в обеих частях распределены по 29 главам, каждая из которых состоит из 6—14 параграфов. За основу классификации приняты методы решения геометрических задач. Главная цель разбиения — помочь читателю ориентироваться в столь большом наборе задач. Без такого разделения это огромное количество задач производило бы несколько угнетающее впечатление.

При подготовке первого издания большую помощь оказали мне советы и замечания, высказанные академиком А. В. Погореловым, А. М. Абрамовым, А. Ю. Вайнтробом, Н. Б. Васильевым, Н. П. Долбилиным и С. Ю. Оревковым. Всем им я выражаю искреннюю благодарность.

# Глава 1

## ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

---

### Основные сведения

1. Треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $A_1B_1C_1$  (обозначение:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ) тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- а)  $AB:BC:CA = A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$ ;
- б)  $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$  и  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ ;
- в)  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$  и  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ .

2. Если параллельные прямые отсекают от угла с вершиной  $A$  треугольники  $AB_1C_1$  и  $AB_2C_2$ , то эти треугольники подобны и  $AB_1:AB_2 = AC_1:AC_2$  (точки  $B_1$  и  $B_2$  лежат на одной стороне угла,  $C_1$  и  $C_2$  — на другой).

3. Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Этот отрезок параллелен третьей стороне и равен половине ее длины.

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Этот отрезок параллелен основаниям и равен полусумме их длин.

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е. квадрату отношения длин соответствующих сторон. Это следует, например, из формулы  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$ .

5. Многоугольники  $A_1A_2...A_n$  и  $B_1B_2...B_n$  называют подобными, если  $A_1A_2:A_2A_3:...:A_nA_1 = B_1B_2:B_2B_3:...:B_nB_1$  и углы при вершинах  $A_1, ..., A_n$  равны соответственно углам при вершинах  $B_1, ..., B_n$ .

Отношение соответственных диагоналей подобных многоугольников равно коэффициенту подобия; для описанных подобных многоугольников отношение радиусов вписанных окружностей также равно коэффициенту подобия.

### Вводные задачи

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что  $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$ .

2. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена высота  $CH$ . Докажите, что  $AC^2 = AB \cdot AH$  и  $CH^2 = AH \cdot BH$ .

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $A_1$  так, что  $BA_1:A_1C=2:1$ . В каком отношении медиана  $CC_1$  делит отрезок  $AA_1$ ?

5. В треугольник  $ABC$  вписан квадрат  $PQRS$  так, что вершины  $P$  и  $Q$  лежат на сторонах  $AB$  и  $AC$ , а вершины  $R$  и  $S$  — на стороне  $BC$ . Выразите длину стороны квадрата через  $a$  и  $h_a$ .

## § 1. Отрезки, заключенные между параллельными прямыми

1.1. Основания  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ).

а) Найдите длину отрезка, отсекаемого диагоналями на средней линии.

б) Найдите длину отрезка  $MN$ , концы которого делят стороны  $AB$  и  $CD$  в отношении  $AM:MB=DN:NC=p:q$ .

1.2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника — вершины параллелограмма. Для каких четырехугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

1.3. Точки  $A_1$  и  $B_1$  делят стороны  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в отношениях  $BA_1:A_1C=1:p$  и  $AB_1:B_1C=1:q$ . В каком отношении отрезок  $AA_1$  делится отрезком  $BB_1$ ?

1.4. Через точку  $P$  медианы  $CC_1$  треугольника  $ABC$  проведены прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  (точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на сторонах  $BC$  и  $CA$ ). Докажите, что  $A_1B_1 \parallel AB$ .

1.5. Прямая, соединяющая точку  $P$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$  с точкой  $Q$  пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ , делит сторону  $AD$  пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону  $BC$ .

1.6. На стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  взята точка  $P$  так, что  $AP:AD=1:n$ ;  $Q$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $BP$ . Докажите, что  $AQ:AC=1:(n+1)$ .

1.7. Вершины параллелограмма  $A_1B_1C_1D_1$  лежат на сторонах параллелограмма  $ABCD$  (точка  $A_1$  лежит на стороне  $AB$ , точка  $B_1$  — на стороне  $BC$  и т. д.). Докажите, что центры обоих параллелограммов совпадают.

1.8. На диагонали  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  взята точка  $K$ . Прямая  $AK$  пересекает прямые  $BC$  и  $CD$  в точках  $L$  и  $M$ . Докажите, что  $AK^2=LK \cdot KM$ .

1.9. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

**1.10.** На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  взята точка  $E$  так, что  $4E=BC$ . Отрезки  $CA$  и  $CE$  пересекают диагональ  $BD$  в точках  $O$  и  $P$  соответственно. Докажите, что если  $BO=PD$ , то  $AD^2=BC^2+AD \cdot BC$ .

**1.11.** Точки  $A$  и  $B$  высекают на окружности с центром  $O$  дугу величиной  $60^\circ$ . На этой дуге взята точка  $M$ . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков  $MA$  и  $OB$ , перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков  $MB$  и  $OA$ .

**1.12.** а) Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, а точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — на другой. Докажите, что если  $AB_1 \parallel BA_1$  и  $AC_1 \parallel CA_1$ , то  $BC_1 \parallel CB_1$ .

б) Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, а точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  таковы, что  $AB_1 \parallel BA_1$ ,  $AC_1 \parallel CA_1$  и  $BC_1 \parallel CB_1$ . Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

**1.13.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что расстояние от любой точки  $M$  отрезка  $A_1B_1$  до прямой  $AB$  равно сумме расстояний от  $M$  до прямых  $AC$  и  $BC$ .

**1.14.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AD$  и  $BC$  прямоугольника  $ABCD$ . На продолжении отрезка  $DC$  за точку  $D$  взята точка  $P$ ;  $Q$  — точка пересечения прямых  $PM$  и  $AC$ . Докажите, что  $\angle QNM = \angle MNP$ .

**1.15.** На продолжениях оснований  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  за точки  $A$  и  $C$  взяты точки  $K$  и  $L$ . Отрезок  $KL$  пересекает стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$ , а диагонали  $AC$  и  $BD$  в точках  $O$  и  $P$ . Докажите, что если  $KM=NL$ , то  $KO=PL$ .

**1.16.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  так, что  $BP:AB=CR:CD=\alpha$  и  $AS:AD=BQ:BC=\beta$ . Докажите, что отрезки  $PR$  и  $QS$  делятся точкой их пересечения в отношениях  $\beta:(1-\beta)$  и  $\alpha:(1-\alpha)$ .

## § 2. Отношение сторон подобных треугольников

**1.17.** а) В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  внутреннего или внешнего угла. Докажите, что  $AD:DC=AB:BC$ .

б) Докажите, что центр  $O$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  делит биссектрису  $AA_1$  в отношении  $AO:OA_1=(b+c):a$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — длины сторон треугольника.

**1.18.** Длины двух сторон треугольника равны  $a$ , а длина третьей стороны равна  $b$ . Вычислите радиус его описанной окружности.

1.19. Прямая, проходящая через вершину  $A$  квадрата  $ABCD$ , пересекает сторону  $CD$  в точке  $E$  и прямую  $BC$  в точке  $F$ . Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

1.20. На высотах  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $B_2$  и  $C_2$  так, что  $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$ . Докажите, что  $AB_2 = AC_2$ .

1.21. В трапецию  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) вписана окружность, касающаяся боковых сторон  $AB$  и  $CD$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно, а оснований  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ .

а) Пусть  $Q$  — точка пересечения отрезков  $BM$  и  $AN$ . Докажите, что  $KQ \parallel AD$ .

б) Докажите, что  $AK \cdot KB = CL \cdot LD$ .

1.22. На стороны  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  (или на их продолжение) опущены перпендикуляры  $AM$  и  $AN$ . Докажите, что  $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ .

1.23. Прямая  $l$  пересекает стороны  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Пусть  $G$  — точка пересечения прямой  $l$  с диагональю  $AC$ . Докажите,

что  $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$ .

1.24. Пусть  $AC$  — большая из диагоналей параллелограмма  $ABCD$ . Из точки  $C$  на продолжения сторон  $AB$  и  $AD$  опущены перпендикуляры  $CE$  и  $CF$  соответственно. Докажите, что  $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$ .

1.25. Углы треугольника  $ABC$  связаны соотношением  $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$ . Докажите, что  $a^2 + bc = c^2$ .

1.26. Концы отрезков  $AB$  и  $CD$  перемещаются по сторонам данного угла, причем прямые  $AB$  и  $CD$  перемещаются параллельно;  $M$  — точка пересечения отрезков  $AB$  и  $CD$ .

Докажите, что величина  $\frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$  остается постоянной.

1.27. Через произвольную точку  $P$  стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  параллельно его медианам  $AK$  и  $CL$  проведены прямые, пересекающие стороны  $BC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что медианы  $AK$  и  $CL$  делят отрезок  $EF$  на три равные части.

1.28. На биссектрисе угла с вершиной  $C$  взята точка  $P$ . Прямая, проходящая через точку  $P$ , высекает на сторонах угла отрезки длиной  $a$  и  $b$ . Докажите, что величина  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  не

зависит от выбора этой прямой.

1.29. На стороне  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  как на диаметре внешним образом построена полуокружность, на которой взяты точки  $K$  и  $L$ , делящие полуокружность на три равные дуги. Докажите, что прямые  $AK$  и  $AL$  делят отрезок  $BC$  на равные части.

1.30. Точка  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . На сторонах  $AC$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что  $BK \cdot AB = BO^2$  и  $AM \cdot AB = AO^2$ . Докажите, что точки  $M$ ,  $O$  и  $K$  лежат на одной прямой.

1.31. На отрезке  $MN$  построены подобные, одинаково ориентированные треугольники  $AMN$ ,  $NBM$  и  $MNC$  (рис. 1). Докажите, что треугольник  $ABC$  подобен всем этим треугольникам, а центр его описанной окружности равноудален от точек  $M$  и  $N$ .

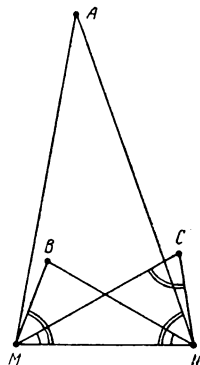


Рис. 1

1.32. Отрезок  $BE$  разбивает треугольник  $ABC$  на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен  $\sqrt{3}$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

### § 3. Отношение площадей подобных треугольников

1.33. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $E$ . Через точку  $E$  проведены прямая  $DE$  параллельно стороне  $BC$  и прямая  $EF$  параллельно стороне  $AB$  ( $D$  и  $F$  — точки соответственно на этих сторонах). Докажите, что  $S_{BDEF} = 2 \sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$ .

1.34. На боковых сторонах  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что отрезок  $MN$  параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите длину  $MN$ , если  $BC = a$  и  $AD = b$ .

1.35. Через некоторую точку  $Q$ , взятую внутри треугольника  $ABC$ , проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  равна  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$ .

1.36. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади  $S$ , равна  $3S/4$ .

1.37. а) Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , равна половине площади  $ABCD$ .

б) Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1.38. Точка  $O$ , лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади  $S$ , отражается симметрично относительно середин его сторон. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в полученных точках.

#### § 4. Вспомогательные равные треугольники

1.39. Катет  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  разделен точками  $D$  и  $E$  на три равные части. Докажите, что если  $BC=3AC$ , то сумма углов  $AEC$ ,  $ADC$  и  $ABC$  равна  $90^\circ$ .

1.40. Точка  $K$ —середина стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ , а точка  $L$  делит диагональ  $AC$  в отношении  $AL:LC=3:1$ . Докажите, что угол  $KLD$  прямой.

1.41. Через вершину  $A$  квадрата  $ABCD$  проведены прямые  $l_1$  и  $l_2$ , пересекающие его стороны. Из точек  $B$  и  $D$  опущены перпендикуляры  $BB_1$ ,  $BB_2$ ,  $DD_1$  и  $DD_2$  на эти прямые. Докажите, что отрезки  $B_1B_2$  и  $D_1D_2$  равны и перпендикулярны.

1.42. На катетах  $CA$  и  $CB$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  так, что  $CD=CE$ . Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек  $D$  и  $C$  на прямую  $AE$ , пересекают гипотенузу  $AB$  в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что  $KL=LB$ .

1.43. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  вписанного четырехугольника  $ABCD$ , длины которых равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , внешним образом построены прямоугольники размером  $a \times c$ ,  $b \times d$ ,  $c \times a$  и  $d \times b$ . Докажите, что их центры являются вершинами прямоугольника.

1.44. Шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ , причем  $AB=CD=EF=R$ . Докажите, что точки попарного пересечения описанных окружностей треугольников  $BOC$ ,  $DOE$  и  $FOA$ , отличные от точки  $O$ , являются вершинами правильного треугольника со стороной  $R$ .

\* \* \*

1.45. На сторонах  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  построены внешним образом правильные треугольники  $BSK$  и  $DCL$ . Докажите, что треугольник  $AKL$  правильный.

1.46. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

**1.47.** На сторонах произвольного треугольника  $ABC$  внешним образом построены равнобедренные треугольники с углами  $2\alpha$ ,  $2\beta$  и  $2\gamma$  при вершинах  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , причем  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Докажите, что углы треугольника  $A'B'C'$  равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

**1.48.** На сторонах треугольника  $ABC$  как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники  $AB_1C$  и  $AC_1B$  внешним образом и  $BA_1C$  внутренним образом. Докажите, что  $AB_1A_1C_1$  — параллелограмм.

**1.49.** а) На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  внешним образом построены прямоугольные треугольники  $AB_1C_1$  и  $AB_1C$ , причем  $\angle C_1 = \angle B_1 = 90^\circ$ ,  $\angle ABC_1 = \angle ACB_1 = \varphi$ ;  $M$  — середина  $BC$ . Докажите, что  $MB_1 = MC_1$  и  $\angle B_1MC_1 = 2\varphi$ .

б) На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник, причем его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

**1.50.** На неравных сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  внешним образом построены равнобедренные треугольники  $AC_1B$  и  $AB_1C$  с углом  $\varphi$  при вершине.

а)  $M$  — точка медианы  $AA_1$  (или ее продолжения), равноудаленная от точек  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $\angle B_1MC_1 = \varphi$ .

б)  $O$  — точка серединного перпендикуляра к отрезку  $BC$ , равноудаленная от точек  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - \varphi$ .

**1.51.** На сторонах выпуклого четырехугольника  $ABCD$  внешним образом построены подобные ромбы, причем их острые углы  $\alpha$  прилегают к вершинам  $A$  и  $C$ . Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных ромбов, равны, а угол между ними равен  $\alpha$ .

## § 5. Треугольник, образованный основаниями высот

**1.52.** Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$ . Чему равен коэффициент подобия?

**1.53.** Из вершины  $C$  остроугольного треугольника  $ABC$  опущена высота  $CH$ , а из точки  $H$  опущены перпендикуляры  $HM$  и  $HN$  на стороны  $BC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что  $\triangle MNC \sim \triangle ABC$ .

**1.54.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ .

а) Докажите, что касательная в точке  $A$  к описанной окружности параллельна прямой  $B_1C_1$ .

б) Докажите, что  $B_1C_1 \perp OA$ , где  $O$  — центр описанной окружности.



1.55. На сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $H$ . Докажите, что  $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$  тогда и только тогда, когда  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .

1.56. а) Докажите, что высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  делят углы треугольника  $A_1B_1C_1$  пополам.

б) На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Докажите, что если  $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$ ,  $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$  и  $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$ , то точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  являются основаниями высот треугольника  $ABC$ .

1.57. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что точка, симметричная  $A_1$  относительно прямой  $AC$ , лежит на прямой  $B_1C_1$ .

1.58. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что если  $A_1B_1 \parallel AB$  и  $B_1C_1 \parallel BC$ , то  $A_1C_1 \parallel AC$ .

1.59. Пусть  $p$  — полупериметр остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $q$  — полупериметр треугольника, образованного основаниями его высот. Докажите, что  $p:q = R:r$ , где  $R$  и  $r$  — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ .

## § 6. Подобные фигуры

1.60. В треугольник вписана окружность радиуса  $r$ . Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что  $r_1 + r_2 + r_3 = r$ .

1.61. Дан треугольник  $ABC$ . Постройте две прямые  $x$  и  $y$  так, чтобы для любой точки  $M$  на стороне  $AC$  сумма длин отрезков  $MX_M$  и  $MY_M$ , проведенных из точки  $M$  параллельно прямым  $x$  и  $y$  до пересечения со сторонами  $AB$  и  $BC$  треугольника, равнялась 1.

1.62. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  из середины  $H$  основания  $BC$  опущен перпендикуляр  $HE$  на боковую сторону  $AC$ ;  $O$  — середина отрезка  $HE$ . Докажите, что прямые  $AO$  и  $BE$  перпендикулярны.

1.63. Докажите, что проекции основания высоты треугольника на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

1.64. На отрезке  $AC$  взята точка  $B$  и на отрезках  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  построены полуокружности  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  по одну сторону от  $AC$ .  $D$  — такая точка на  $S_3$ , что  $BD \perp AC$ . Общая

касательная к  $S_1$  и  $S_2$  касается этих полуокружностей в точках  $F$  и  $E$  соответственно.

а) Докажите, что прямая  $EF$  параллельна касательной к  $S_3$ , проведенной через точку  $D$ .

б) Докажите, что  $BFDE$  — прямоугольник.

**1.65.** Из произвольной точки  $M$  окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , опустили перпендикуляры  $MQ$  и  $MP$  на его две противоположные стороны и перпендикуляры  $MR$  и  $MT$  на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые  $PR$  и  $QT$  перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит диагонали прямоугольника  $ABCD$ .

**1.66.** К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Рассмотрим две прямые, каждая из которых проходит через точки касания, принадлежащие одной из окружностей. Докажите, что точка пересечения этих прямых расположена на прямой, соединяющей центры окружностей.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.67.** Основание равнобедренного треугольника составляет четверть его периметра. Из произвольной точки основания проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Во сколько раз периметр треугольника больше периметра отсеченного параллелограмма?

**1.68.** Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.

**1.69.** Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

**1.70.** Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  симметричны центру описанной окружности треугольника  $ABC$  относительно его сторон. Докажите, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

**1.71.** Докажите, что если  $\angle BAC = 2 \angle ABC$ , то  $BC^2 = (AC + AB) \cdot AC$ .

**1.72.** На прямой  $l$  даны точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Через точки  $A$  и  $B$ , а также через точки  $C$  и  $D$  проводятся параллельные прямые. Докажите, что диагонали полученных таким образом параллелограммов (или их продолжения) пересекают прямую  $l$  в двух фиксированных точках.

**1.73.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектриса  $AD$  и средняя линия  $A_1C_1$ . Прямые  $AD$  и  $A_1C_1$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что  $2A_1K = |b - c|$ .

1.74. На сторонах  $AD$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $MN \parallel AC$ . Докажите, что  $S_{ABM} = S_{CBN}$ .

1.75. На диагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  взяты точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AP = CQ$ . Точка  $M$  такова, что  $PM \parallel AD$  и  $QM \parallel AB$ . Докажите, что точка  $M$  лежит на диагонали  $BD$ .

1.76. Продолжения боковых сторон трапеции с основаниями  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$ . Концы отрезка  $EF$ , параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что  $AE:CF = AO:CO$ .

1.77. Три прямые, параллельные сторонам данного треугольника, отсекают от него три треугольника, причем остается равносторонний шестиугольник. Найдите длину стороны шестиугольника, если длины сторон треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

1.78. Три прямые, параллельные сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, причем стороны треугольника отсекают на этих прямых отрезки длиной  $x$ . Найдите  $x$ , если длины сторон треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

1.79. Точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ , причем  $\angle ABP = \angle ACP$ . На прямых  $AB$  и  $AC$  взяты такие точки  $C_1$  и  $B_1$ , что  $BC_1:CB_1 = CP:BP$ . Докажите, что одна из диагоналей параллелограмма, две стороны которого лежат на прямых  $BP$  и  $CP$ , а две другие стороны (или их продолжение) проходят через  $B_1$  и  $C_1$ , параллельна  $BC$ .

## Решения

1.1. а) Пусть  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $K$  и  $L$  — точки пересечения прямой  $PQ$  с диагоналями  $AC$  и  $BD$ . Тогда  $PL = a/2$  и  $PK = b/2$ , поэтому  $KL = PL - PK = (a - b)/2$ .

б) Возьмем на стороне  $AD$  точку  $F$  так, что  $BF \parallel CD$ . Пусть  $E$  — точка пересечения отрезков  $MN$  и  $BF$ . Тогда  $MN = ME + EN = \frac{qAF}{p+q} + b = \frac{q(a-b) + (p+q)b}{p+q} = \frac{qa+pb}{p+q}$ .

1.2. Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно четырехугольника  $ABCD$ . Тогда  $KL = MN = AC/2$  и отрезок  $KL$  параллелен  $MN$ , т. е.  $KLMN$  — параллелограмм. Теперь ясно, что  $KLMN$  — прямоугольник, если диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны; ромб, если  $AC = BD$ ; квадрат, если диагонали  $AC$  и  $BD$  равны по длине и перпендикулярны.

1.3. Обозначим точку пересечения отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$  через  $O$ . Проведем в треугольнике  $B_1BC$  отрезок  $A_1A_2 \parallel BB_1$ . Тогда

$B_1C/B_1A_2=1+p$ , поэтому  $AO:OA_1=AB_1:B_1A_2=B_1C:qB_1A_2=(1+p):q$ .

1.4. Пусть  $A_2$  — середина отрезка  $A_1B$ . Тогда  $CA_1:A_1A_2=CP:PC_1$  и  $A_1A_2:A_1B=1:2$ , поэтому  $CA_1:A_1B=CP:2PC_1$ . Аналогично  $CB_1:B_1A=CP:2PC_1=CA_1:A_1B$ .

1.5. Точка  $P$  лежит на медиане  $QM$  треугольника  $AQD$  (или на ее продолжении). Легко проверить, что решение задачи 1.4 остается верным и в случае, когда точка  $P$  лежит на продолжении медианы. Следовательно,  $BC \parallel AD$ .

1.6. Так как  $\triangle AQP \sim \triangle CQB$ , то  $AQ:QC=AP:BC=1:n$ . Поэтому  $AC=AQ+QC=(n+1)AQ$ .

1.7. Центр параллелограмма  $A_1B_1C_1D_1$  как середина отрезка  $B_1D_1$  принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Аналогично он принадлежит отрезку, соединяющему середины сторон  $BC$  и  $AD$ . Точка пересечения этих отрезков — центр параллелограмма  $ABCD$ .

1.8. Ясно, что  $AK:KM=BK:KD=LK:AK$ , т. е.  $AK^2=LK \cdot KM$ .

1.9. Пусть  $AC$  — диаметр окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ . Опустим перпендикуляры  $AA_1$  и  $CC_1$  на  $BD$  (рис. 2). Нужно доказать, что  $BA_1=DC_1$ . Опустим перпендикуляр  $OP$  из центра  $O$  описанной окружности на  $BD$ . Ясно, что  $P$  — середина отрезка  $BD$ . Прямые  $AA_1$ ,  $OP$ ,  $CC_1$  параллельны и  $AO=OC$ , поэтому  $A_1P=PC_1$ . Так как  $P$  — середина  $BD$ , то  $BA_1=DC_1$ .

1.10. Так как  $BO=PD$ , то  $BO:OD=DP:PB=k$ . Пусть  $BC=1$ . Тогда  $AD=k$  и  $ED=1/k$ . Поэтому  $k=AD=AE+ED=1+(1/k)$ , т. е.  $k^2=1+k$ . Остается заметить, что  $k^2=AD^2$  и  $1+k=BC^2+BC \cdot AD$ .

1.11. Пусть  $C, D, E, F$  — середины сторон  $AO, OB, BM, MA$  соответственно четырехугольника  $AOBM$ . Поскольку  $AB=MO=R$ , где  $R$  — радиус данной окружности, то согласно задаче 1.2.  $CDEF$  — ромб. Поэтому  $CE \perp DF$ .

1.12. а) Если прямые, на которых лежат данные точки, параллельны, то утверждение задачи очевидно. Будем считать, что эти прямые пересекаются в точке  $O$ . Тогда  $OA:OB=OB_1:OA_1$  и  $OC:OA=OA_1:OC_1$ , поэтому  $OC:OB=OB_1:OC_1$ , а значит,  $BC_1 \parallel CB_1$  (отношение отрезков следует считать ориентированными; см. с. 111).

б) Пусть  $D$  и  $E$  — точки пересечения прямых  $AB_1$  и  $CA_1$ ,  $CB_1$  и  $AC_1$ . Тогда  $CA_1:A_1D=CB:BA=EC_1:C_1A$ . А так как  $\triangle CB_1D \sim \triangle EB_1A$ , точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

1.13. Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон. Пусть  $a$  — расстояние от точки  $A_1$  до прямых  $AC$  и  $AB$ ,  $b$  — расстояние от точки  $B_1$  до прямых  $AB$  и  $BC$ . Пусть, далее,  $A_1M:B_1M=p:q$ , причем  $p+q=1$ . Тогда расстояния от точки  $M$  до прямых  $AC$  и  $BC$  равны  $qa$  и  $pb$  соответственно. С другой стороны, согласно задаче 1.1, б) расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$  равно  $qa+pb$ .



1.18. Пусть  $O$  — центр описанной окружности равнобедренного треугольника  $ABC$ ,  $B_1$  — середина основания  $AC$ ,  $A_1$  — середина боковой стороны  $BC$ . Так как  $\triangle BOA_1 \sim \triangle BCB_1$ , то  $BO : BA_1 = BC : BB_1$ , а значит,  $R = BO = a^2 / \sqrt{4a^2 - b^2}$ .

1.19. Если  $\angle EAD = \varphi$ , то  $AE = AD / \cos \varphi = AB / \cos \varphi$  и  $AF = AB / \sin \varphi$ . Поэтому  $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{AB^2} = \frac{1}{AB^2}$ .

1.20. Легко проверить, что  $AB^2 = AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB = AC^2$ .

1.21. а) Так как  $BQ : QM = BN : AM = BK : AK$ , то  $KQ \parallel AM$ .

б) Пусть  $O$  — центр вписанной окружности. Так как  $\angle CBA + \angle BAD = 180^\circ$ , то  $\angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$ . Поэтому  $\triangle AKO \sim \triangle OKB$ , т. е.  $AK : KO = OK : KB$ . Следовательно,  $AK \cdot KB = KO^2 = R^2$ , где  $R$  — радиус вписанной окружности. Аналогично  $CL \cdot LD = R^2$ .

1.22. Если угол  $ABC$  тупой (соответственно острый), то угол  $MAN$  тоже тупой (соответственно острый). Кроме того, стороны этих углов взаимно перпендикулярны. Поэтому  $\angle ABC = \angle MAN$ . Прямоугольные треугольники  $ABM$  и  $ADN$  имеют равные углы  $ABM$  и  $ADN$ , поэтому  $AM : AN = AB : AD = AB : CB$ , т. е.  $\triangle ABC \sim \triangle MAN$ .

1.23. Возьмем на диагонали  $AC$  такие точки  $D'$  и  $B'$ , что  $BB' \parallel l$  и  $DD' \parallel l$ . Тогда  $AB : AE = AB' : AG$  и  $AD : AF = AD' : AG$ . Так как стороны треугольников  $ABB'$  и  $CDD'$  попарно параллельны и  $AB = CD$ , эти треугольники равны и  $AB' = CD'$ . Поэтому

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AB'}{AG} + \frac{AD'}{AG} = \frac{CD' + AD'}{AG} = \frac{AC}{AG}.$$

1.24. Опустим из вершины  $B$  перпендикуляр  $BG$  на  $AC$  (рис. 4.). Из подобия треугольников  $ABG$  и  $ACE$  получаем  $AC \cdot AG = AE \cdot AB$ . Прямые  $AF$  и  $CB$  параллельны, поэтому углы  $GCB$  и  $CAF$  равны и прямоугольные треугольники  $CBG$  и  $ACF$  подобны. Из подобия этих треугольников получаем  $AC \cdot CG = AF \cdot BC$ . Складывая полученные равенства, находим  $AC \cdot (AG + CG) = AE \cdot AB + AF \cdot BC$ . Так как  $AG + CG = AC$ , получаем требуемое равенство.

1.25. Так как  $\alpha + \beta = 90^\circ - (\alpha/2)$ , то  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + (\alpha/2)$ . Поэтому на стороне  $AB$  можно выбрать точку  $D$  так, что  $\angle ACD = 90^\circ - (\alpha/2)$ , т. е.  $AC = AD$ . Тогда  $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ , а значит,  $BC : BD = AB : CB$ , т. е.  $a^2 = c(c - b)$ .

1.26. При перемещении отрезков  $AB$  и  $CD$  треугольник  $AMC$  заменится на другой треугольник, подобный исходному. Поэтому величина  $AM/CM$  остается постоянной. Аналогично величина  $BM/DM$  остается постоянной.

1.27. Обозначим точку пересечения медиан через  $O$ , точки пересечения медианы  $AK$  с прямыми  $FP$  и  $FE$  — через  $Q$  и  $M$ , точки пересечения медианы  $CL$  с прямыми  $EP$  и  $FE$  — через

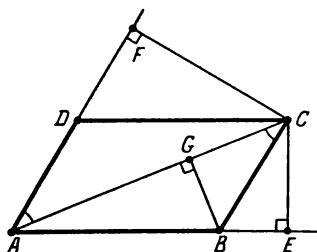


Рис. 4

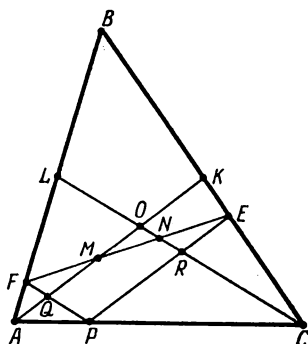


Рис. 5

$R$  и  $N$  соответственно (рис. 5). Ясно, что  $FM:FE=FQ:FP=LO:LC=1:3$ , т. е.  $FM=FE/3$ . Аналогично  $EN=FE/3$ .

1.28. Пусть  $A$  и  $B$  — точки пересечения данной прямой со сторонами угла. Возьмем на отрезках  $AC$  и  $BC$  точки  $K$  и  $L$  так, что  $PK \parallel BC$  и  $PL \parallel AC$ . Так как  $\triangle AKP \sim \triangle PLB$ , то  $AK:KP=PL:LB$ , а значит,  $(a-p)(b-p)=p^2$ , где  $p=PK=PL$ . Следовательно,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$ .

1.29. Обозначим середину стороны  $BC$  через  $O$ , а точки пересечения  $AK$  и  $AL$  со стороной  $BC$  — через  $P$  и  $Q$ . Можно считать, что  $BP < BQ$ . Треугольник  $LCO$  равнобедренный и  $LC \parallel AB$ . Поэтому  $\triangle ABQ \sim \triangle LCQ$ , т. е.  $BQ:QC=AB:LC=2:1$ . Следовательно,  $BC=BQ+QC=3QC$ . Аналогично  $BC=3BP$ .

1.30. Так как  $BK:BO=BO:AB$  и  $\angle KBO=\angle ABO$ , то  $\triangle KOB \sim \triangle OAB$ . Поэтому  $\angle KOB=\angle OAB$ . Аналогично  $\angle AOM=\angle ABO$ . Следовательно,  $\angle KOM=\angle KOB+\angle BOA+\angle AOM=\angle OAB+\angle BOA+\angle ABO=180^\circ$ , т. е. точки  $K$ ,  $O$  и  $M$  лежат на одной прямой.

1.31. Так как  $\angle AMN=\angle MNC$  и  $\angle BMN=\angle MNA$ , то  $\angle AMB=\angle ANC$ . Кроме того,  $AM:AN=NB:NM=BM:CN$ . Поэтому  $\triangle AMB \sim \triangle ANC$ , а значит,  $\angle MAB=\angle NAC$ . Следовательно,  $\angle BAC=\angle MAN$ . Для других углов доказательство аналогично.

Пусть точки  $B_1$  и  $C_1$  симметричны  $B$  и  $C$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $MN$ . Так как  $AM:NB=MN:BM=MC:NC$ , то  $MA \cdot MC_1=AM \cdot NC=NB \cdot MC=MB_1 \cdot MC$ . Следовательно, точка  $A$  лежит на окружности, описанной вокруг трапеции  $BB_1CC_1$ .

1.32. Так как  $\angle AEB+\angle BEC=180^\circ$ , то эти углы не могут быть разными углами подобных треугольников  $ABE$  и  $BEC$ , т. е. они равны и  $BE$  — перпендикуляр.

Возможны два варианта:  $\angle ABE=\angle CBE$  или  $\angle ABE=\angle BCE$ . Первый вариант отпадает, так как в этом случае  $\triangle ABE=\triangle CBE$ . Остается второй вариант. В этом случае  $\angle ABC=\angle ABE+\angle CBE=$

$= \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$ . В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катеты относятся, как  $1:\sqrt{3}$ , поэтому его углы равны  $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ .

1.33.  $S_{BDEF}/2S_{ADE} = S_{BDE}/S_{ADE} = DB/AD = EF/AD = \sqrt{S_{EFC}/S_{ADE}}$ . Поэтому  $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$ .

1.34. Пусть  $MN = x$ ;  $E$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Треугольники  $EBC$ ,  $EMN$  и  $EAD$  подобны, поэтому  $S_{EBC}:S_{EMN}:S_{EAD} = a^2:x^2:b^2$ . Так как  $S_{EMN} - S_{EBC} = S_{MBCN} = S_{MADN} = S_{EAD} - S_{EMN}$ , то  $x^2 - a^2 = b^2 - x^2$ , т. е.  $x^2 = (a^2 + b^2)/2$ .

1.35. Проведем через точку  $Q$ , взятую внутри треугольника  $ABC$ , прямые  $DE$ ,  $FG$  и  $HI$  параллельно  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно так, чтобы точки  $F$  и  $H$  лежали на стороне  $BC$ , точки  $E$  и  $I$  — на стороне  $AC$ , точки  $D$  и  $G$  — на стороне  $AB$  (рис. 6). Введем обозначения:  $S = S_{ABC}$ ,  $S_1 = S_{GDQ}$ ,  $S_2 = S_{IEQ}$ ,  $S_3 = S_{HFQ}$ . Тогда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{GQ}{AC} + \frac{IE}{AC} + \frac{FQ}{AC} = \frac{AI + IE + EC}{AC} = 1,$$

т. е.  $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$ .

1.36. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ; точка  $A_1$  симметрична  $M$  относительно середины отрезка  $BC$ . Длины сторон треугольника  $CMA_1$  относятся к медианам треугольника  $ABC$ , как  $2:3$ . Поэтому искомая площадь равна  $9S_{CMA_1}/4$ . Ясно, что  $S_{CMA_1} = S/3$  (см. решение задачи 4.1).

1.37. Пусть  $E, F, G$  и  $H$  — середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$ .

а) Ясно, что  $S_{AEH} + S_{CFG} = \frac{S_{ABD}}{4} + \frac{S_{CBD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4}$ . Аналогично  $S_{BEF} + S_{DGH} = \frac{S_{ABCD}}{4}$ . Поэтому  $S_{EFGH} = S_{ABCD} - \frac{S_{ABCD}}{4} - \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{2}$ .

б) Так как  $AC = BD$ , то  $EFGH$  — ромб (задача 1.2). Согласно задаче а)  $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG \cdot FH$ .

1.38. Пусть  $E, F, G$  и  $H$  — середины сторон четырехугольника  $ABCD$ ; точки  $E_1, F_1, G_1$  и  $H_1$  симметричны точке  $O$  относительно этих точек. Так как  $EF$  — средняя линия треугольника  $E_1OF_1$ , то  $S_{E_1OF_1} = 4S_{EOF}$ . Аналогично  $S_{F_1OG_1} = 4S_{FOG}$ ,  $S_{G_1OH_1} = 4S_{GOH}$  и  $S_{H_1OE_1} = 4S_{HOE}$ . Поэтому  $S_{E_1F_1G_1H_1} = 4S_{EFGH}$ . Согласно задаче 1.37, а)  $S_{ABCD} = 2S_{EFGH}$ . Поэтому  $S_{E_1F_1G_1H_1} = 2S_{ABCD} = 2S$ .

1.39. Первое решение. Рассмотрим квадрат  $BCMN$  и разделим его сторону  $MN$  точками  $P$  и  $Q$  на три равные части (рис. 7). Тогда  $\triangle ABC = \triangle PDQ$  и  $\triangle ACD = \triangle PMA$ . Поэтому треугольник  $PAD$  равнобедренный прямоугольный и  $\angle ABC + \angle ADC = \angle PDQ + \angle ADC = 45^\circ$ .

Второе решение. Так как  $DE = 1$ ,  $EA = \sqrt{2}$ ,  $EB = 2$ ,  $AD = \sqrt{5}$  и  $BA = \sqrt{10}$ , то  $DE:AE = EA:EB = AD:BA$  и  $\triangle DEA \sim \triangle AEB$ .



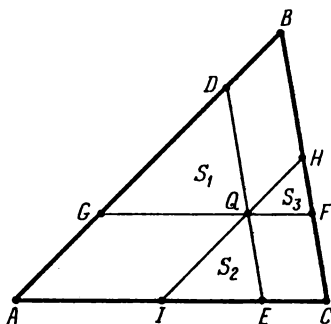


Рис. 6

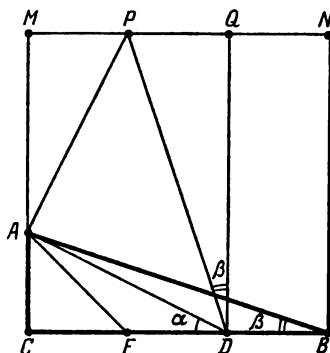


Рис. 7

Следовательно,  $\angle ABC = \angle EAD$ . Кроме того,  $\angle AEC = \angle CAE = 45^\circ$ . Поэтому  $\angle ABC + \angle ADC + \angle AEC = (\angle EAD + \angle CAE) + \angle ADC = \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ$ .

1.40. Опустим из точки  $L$  перпендикуляры  $LM$  на  $AB$  и  $LN$  на  $AD$ . Тогда  $KM = MB = ND$  и  $KL = LB = DL$ , поэтому прямоугольные треугольники  $KML$  и  $DNL$  равны. Следовательно,  $\angle DLK = \angle NLM = 90^\circ$ .

1.41. Так как  $D_1A = B_1B$ ,  $AD_2 = BB_2$  и  $\angle D_1AD_2 = \angle B_1BB_2$ , то  $\triangle D_1AD_2 = \triangle B_1BB_2$ . Стороны  $AD_1$  и  $BB_1$  (а также  $AD_2$  и  $BB_2$ ) этих треугольников перпендикулярны, поэтому  $B_1B_2 \perp D_1D_2$ .

1.42. На продолжении отрезка  $AC$  за точку  $C$  возьмем точку  $M$  так, что  $CM = CE$  (рис. 8). Тогда треугольник  $ACE$  при повороте с центром  $C$  на  $90^\circ$  переходит в треугольник  $BCM$ . Поэтому прямая  $MB$  перпендикулярна прямой  $AE$ , а значит, параллельна прямой  $CL$ . Так как  $MC = CE = DC$  и прямые  $DK$ ,  $CL$  и  $MB$  параллельны, то  $KL = LB$ .

1.43. Пусть на сторонах  $AB$  и  $BC$  построены прямоугольники  $ABC_1D_1$  и  $A_2BCD_2$ ;  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  — центры прямоугольников, построенных на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . Так как  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ , то  $\triangle ADC = \triangle A_2BC_1$ , а значит,  $\triangle RDS = \triangle PBQ$  и  $RS = PQ$ . Аналогично  $QR = PS$ . Следовательно,  $PQRS$  — параллелограмм, причем один из треугольников  $RDS$  и  $PBQ$  построен на его сторонах внешним образом, а другой внутренним; аналогичное утверждение справедливо и для треугольников  $QCR$  и  $SAP$ . Поэтому  $\angle PQR + \angle RSP = \angle BQC + \angle DSA = 180^\circ$ , так как  $\angle PQB = \angle RSD$  и  $\angle RQC = \angle PSA$ . Следовательно,  $PQRS$  — прямоугольник.

1.44. Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$  — точки пересечения описанных окружностей треугольников  $FOA$  и  $BOC$ ,  $BOC$  и  $DOE$ ,  $DOE$  и  $FOA$ ;  $2\alpha$ ,  $2\beta$  и  $2\gamma$  — углы при вершинах равнобедренных треугольников  $BOC$ ,  $DOE$  и  $FOA$  (рис. 9). Точка  $K$  лежит на дуге  $OB$  описанной окружности равнобедренного треугольника  $BOC$ , поэтому  $\angle OKB = 90^\circ + \alpha$ . Аналогично  $\angle OKA = 90^\circ + \gamma$ . Так как  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ ,

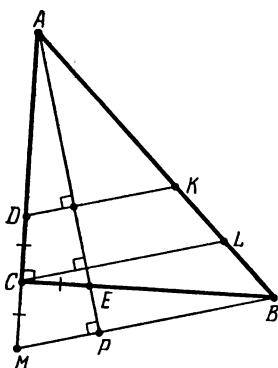


Рис. 8

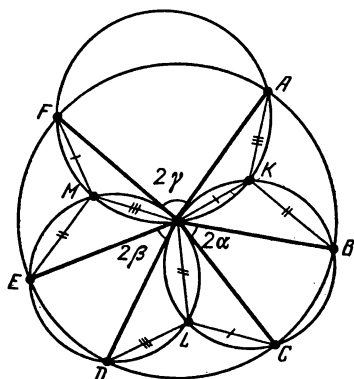


Рис. 9

то  $\angle AKB = 90^\circ + \beta$ . Внутри правильного треугольника  $AOB$  существует единственная точка  $K$ , из которой его стороны видны под данными углами. Аналогичные рассуждения для точки  $L$ , лежащей внутри треугольника  $COB$ , показывают, что  $\triangle OKB = \triangle CLO$ . Докажем теперь, что  $\triangle KOL = \triangle OKB$ . В самом деле,  $\angle COL = \angle KBO$ , поэтому  $\angle KOB + \angle COL = 180^\circ - \angle OKB = 90^\circ - \alpha$ , а значит,  $\angle KOL = 2\alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha = \angle OKB$ . Следовательно,  $KL = OB = R$ . Аналогично  $LM = MK = R$ .

1.45. Пусть  $\angle A = \alpha$ . Легко проверить, что оба угла  $KCL$  и  $ADL$  равны  $240^\circ - \alpha$  (или  $120^\circ + \alpha$ ). А так как  $KC = BC = AD$  и  $CL = DL$ , то  $\triangle KCL = \triangle ADL$ , а значит,  $KL = AL$ . Аналогично  $KL = AK$ .

1.46. Пусть  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — центры квадратов, построенных на сторонах  $DA$ ,  $AB$  и  $BC$  параллелограмма с острым углом  $\alpha$  при вершине  $A$ . Легко проверить, что  $\angle PAQ = 90^\circ + \alpha = \angle RBQ$ , а значит,  $\triangle PAQ = \triangle RBQ$ . Стороны  $AQ$  и  $BQ$  этих треугольников перпендикулярны, поэтому  $PQ \perp QR$ .

1.47. Заметим сначала, что сумма углов при вершинах  $A$ ,  $B$  и  $C$  шестиугольника  $AB'CA'BC'$  равна  $360^\circ$ , так как по условию сумма его углов при остальных вершинах равна  $360^\circ$ . Построим на стороне  $AC'$  внешним образом треугольник  $AC'P$ , равный треугольнику  $BC'A'$  (рис. 10). Тогда  $\triangle AB'P = \triangle CB'A'$ , так как  $AB' = CB'$ ,  $AP = CA'$  и  $\angle PAB' = 360^\circ - \angle PAC' - \angle C'AB' = 360^\circ - \angle A'BC' - \angle C'AB' = \angle A'CB'$ . Следовательно,  $\triangle C'B'A' = \triangle C'B'P$ , а значит,  $2\angle A'B'C' = \angle PB'A' = \angle AB'C$ , так как  $\angle PB'A' = \angle A'B'C$ .

1.48. Так как  $BA : BC = BC_1 : BA_1$  и

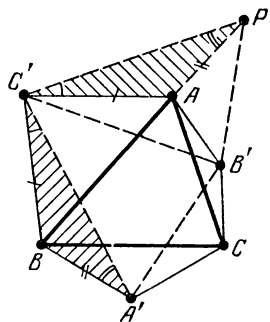


Рис. 10

$\angle ABC = \angle C_1BA_1$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle C_1BA_1$ . Аналогично  $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C$ . А так как  $BA_1 = A_1C$ , то  $\triangle C_1BA_1 = \triangle B_1A_1C$ . Следовательно,  $AC_1 = C_1B = B_1A_1$  и  $AB_1 = B_1C = C_1A_1$ . Ясно также, что четырехугольник  $AB_1A_1C_1$  выпуклый.

1.49. а) Пусть  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$ . Тогда  $MP = AC/2 = QB_1$ ,  $MQ = AB/2 = PC_1$  и  $\angle C_1PM = \angle C_1PB + \angle BPM = \angle B_1QC + \angle CQM = \angle B_1QM$ . Следовательно,  $\triangle MQB_1 = \triangle C_1PM$ , а значит,  $MC_1 = MB_1$ . Кроме того,  $\angle PMC_1 + \angle QMB_1 = \angle QB_1M + \angle QMB_1 = 180^\circ - \angle MQB_1$ , а  $\angle MQB_1 = \angle A + \angle CQB_1 = \angle A + (180^\circ - 2\varphi)$ . Следовательно,  $\angle B_1MC_1 = \angle PMQ + 2\varphi - \angle A = 2\varphi$ . (Случай, когда  $\angle C_1PB + \angle BPM > 180^\circ$ , разбирается аналогично.)

б) Возьмем на сторонах  $AB$  и  $AC$  такие точки  $B'$  и  $C'$ , что  $AB':AB = AC':AC = 2:3$ . Середина  $M$  отрезка  $B'C'$  совпадает с точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Построим на сторонах  $AB'$  и  $AC'$  внешним образом прямоугольные треугольники  $AB'C_1$  и  $AB_1C'$  с углом  $\varphi = 60^\circ$ . Тогда  $B_1$  и  $C_1$  — центры правильных треугольников, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$ ; с другой стороны, согласно задаче а)  $MB_1 = MC_1$  и  $\angle B_1MC_1 = 120^\circ$ .

Замечание. Утверждения задач а) и б) остаются верными и для треугольников, построенных внутренним образом.

1.50. а) Пусть  $B'$  — точка пересечения прямой  $AC$  и перпендикуляра к прямой  $AB_1$ , восстановленного из точки  $B_1$ ; точка  $C'$  определяется аналогично. Так как  $AB':AC' = AC_1:AB_1 = AB:AC$ , то  $B'C' \parallel BC$ . Если  $N$  — середина отрезка  $B'C'$ , то, как следует из задачи 1.49,  $NC_1 = NB_1$  (т. е.  $N = M$ ) и  $\angle B_1NC_1 = 2\angle AB'B_1 = 180^\circ - 2\angle CAB_1 = \varphi$ .

б) Построим на стороне  $BC$  внешним образом равнобедренный треугольник  $BA_1C$  с углом  $360^\circ - 2\varphi$  при вершине  $A_1$  (если  $\varphi < 90^\circ$ , строим внутренним образом треугольник с углом  $2\varphi$ ). Так как сумма углов при вершинах трех построенных равнобедренных треугольников равна  $360^\circ$ , треугольник  $A_1B_1C_1$  имеет углы  $180^\circ - \varphi$ ,  $\varphi/2$  и  $\varphi/2$  (см. задачу 1.47). В частности, этот треугольник равнобедренный, а значит,  $A_1 = O$ .

1.51. Пусть  $O_1, O_2, O_3$  и  $O_4$  — центры ромбов, построенных на сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$ ;  $M$  — середина диагонали  $AC$ . Тогда  $MO_1 = MO_2$  и  $\angle O_1MO_2 = \alpha$  (см. задачу 1.49). Аналогично  $MO_3 = MO_4$  и  $\angle O_3MO_4 = \alpha$ . Следовательно, при повороте на угол  $\alpha$  относительно точки  $M$  треугольник  $O_1MO_3$  переходит в  $O_2MO_4$ .

1.52. Так как  $A_1C = AC|\cos C|$ ,  $B_1C = BC|\cos C|$  и угол  $C$  у треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C$  общий, то эти треугольники подобны, причем коэффициент подобия равен  $|\cos C|$ .

1.53. Так как точки  $M$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $CH$ , то  $\angle CMN = \angle CHN$ , а так как  $AC \perp HN$ , то  $\angle CHN = \angle A$ . Аналогично  $\angle CNM = \angle B$ .

1.54. а) Пусть  $l$  — касательная в точке  $A$  к описанной окружности. Тогда  $\angle(l, AB) = \angle(AC, CB) = \angle(C_1B_1, AC_1)$ , а значит,  $l \parallel B_1C_1$ .

б) Так как  $OA \perp l$  и  $l \parallel B_1C_1$ , то  $OA \perp B_1C_1$ .

1.55. Если  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты, то прямоугольные треугольники  $AA_1C$  и  $BB_1C$  имеют равные углы при вершине  $C$ , поэтому они подобны. Следовательно,  $\Delta A_1BH \sim \Delta B_1AH$ , а значит,  $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$ . Аналогично  $BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ .

Если  $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$ , то  $\Delta A_1BH \sim \Delta B_1AH$ , а значит,  $\angle BA_1H = \angle AB_1H = \varphi$ . Поэтому  $\angle CA_1H = \angle CB_1H = 180^\circ - \varphi$ . Аналогично  $\angle AC_1H = \angle CA_1H = 180^\circ - \varphi$  и  $\angle AC_1H = \angle AB_1H = \varphi$ , поэтому  $\varphi = 90^\circ$ , т. е.  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты.

1.56. а) Согласно задаче 1.52  $\angle C_1A_1B = \angle CA_1B_1 = \angle A$ . Так как  $AA_1 \perp BC$ , то  $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$ . Аналогично доказывается, что лучи  $B_1B$  и  $C_1C$  — биссектрисы углов  $A_1B_1C_1$  и  $A_1C_1B_1$ .

б) Прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  являются биссектрисами внешних углов треугольника  $A_1B_1C_1$ , поэтому  $A_1A$  — биссектриса угла  $B_1A_1C_1$ , а значит,  $AA_1 \perp BC$ . Для прямых  $BB_1$  и  $CC_1$  доказательство аналогично.

1.57. Из результата задачи 1.56, а) следует, что прямая  $B_1A_1$  при симметрии относительно прямой  $AC$  переходит в прямую  $B_1C_1$ .

1.58. Согласно задаче 1.52  $\angle B_1A_1C = \angle BAC$ . Так как  $A_1B_1 \parallel AB$ , то  $\angle B_1A_1C = \angle ABC$ . Поэтому  $\angle BAC = \angle ABC$ . Аналогично из того, что  $B_1C_1 \parallel BC$ , следует равенство  $\angle ABC = \angle BCA$ . Поэтому треугольник  $ABC$  равнобедренный и  $A_1C_1 \parallel AC$ .

1.59. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Так как  $OA \perp B_1C_1$  (см. задачу 1.54, б), то  $S_{AOC_1} + S_{AOB_1} = R \cdot B_1C_1/2$ . Аналогичные рассуждения для вершин  $B$  и  $C$  показывают, что  $S_{ABC} = qR$ . С другой стороны,  $S_{ABC} = pr$ .

1.60. Периметр треугольника, отсекаемого прямой, параллельной стороне  $BC$ , равен сумме расстояний от точки  $A$  до точек касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $AC$ , поэтому сумма периметров маленьких треугольников равна периметру треугольника  $ABC$ :  $P_1 + P_2 + P_3 = P$ . Из подобия треугольников следует, что  $r_i/r = P_i/P$ . Складывая эти равенства, получаем требуемое.

1.61. Пусть  $M = A$ . Тогда  $X_A = A$ , поэтому  $AY_A = 1$ . Аналогично  $CX_C = 1$ . Докажем, что  $y = AY_A$  и  $x = CX_C$  — искомые прямые. Возьмем на стороне  $BC$  точку  $D$  так, что  $AB \parallel MD$  (рис. 11). Пусть  $E$  — точка пересечения прямых  $CX_C$  и  $MD$ . Тогда  $X_M M + Y_M M = X_C E + Y_M M$ . Так как  $\Delta ABC \sim \Delta MDC$ , то  $CE = Y_M M$ . Поэтому  $X_M M + Y_M M = X_C E + CE = X_C C = 1$ .

1.62. Пусть  $D$  — середина отрезка  $BH$ . Так как  $\Delta BHA \sim \Delta HEA$ , то  $AD : AO = AB : AH$  и  $\angle DAN = \angle OAE$ . Следовательно,  $\angle DAO = \angle BAN$ , а значит,  $\Delta DAO \sim \Delta BAN$  и  $\angle DOA = \angle BAN = 90^\circ$ .

1.63. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ . Опустим из точки  $B_1$  перпендикуляры  $B_1K$  и  $B_1N$  на стороны  $AB$  и  $BC$  и перпендикуляры  $B_1L$  и  $B_1M$  на высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Так

как  $KB_1 : C_1C = AB_1 : AC = LB_1 : A_1C$ , то  $\Delta KLB_1 \sim \Delta C_1A_1C$ , а значит,  $KL \parallel C_1A_1$ . Аналогично  $MN \parallel C_1A_1$ . Кроме того,  $KN \parallel C_1A_1$  (см. задачу 1.53). Следовательно, точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

1.64. а) Пусть  $O$  — середина  $AC$ ,  $O_1$  — середина  $AB$ ,  $O_2$  — середина  $BC$ . Будем считать, что  $AB \leq BC$ . Проведем через точку  $O_1$  прямую  $O_1K$  параллельно  $EF$  ( $K$  — точка на отрезке  $EO_2$ ). Докажем, что прямоугольные треугольники  $DBO$  и  $O_1KO_2$  равны. В самом деле,  $O_1O_2 = DO = AC/2$  и  $BO = KO_2 = (BC - AB)/2$ . Из равенства треугольников  $DBO$  и  $O_1KO_2$  следует, что  $\angle BOD = \angle O_1O_2E$ , т. е. прямая  $DO$  параллельна  $EO_2$  и касательная, проведенная через точку  $D$ , параллельна прямой  $EF$ .

б) Так как углы между диаметром  $AC$  и касательными к окружностям в точках  $F, D, E$  равны, то  $\angle FAB = \angle DAC = \angle EBC$  и  $\angle FBA = \angle DCA = \angle ECB$ , т. е.  $F$  лежит на отрезке  $AD$ ,  $E$  — на отрезке  $DC$ . Кроме того,  $\angle AFB = \angle BEC = \angle ADC = 90^\circ$ , поэтому  $FDEB$  — прямоугольник.

1.65. Пусть  $MQ$  и  $MP$  — перпендикуляры, опущенные на стороны  $AD$  и  $BC$ ,  $MR$  и  $MT$  — перпендикуляры, опущенные на продолжения

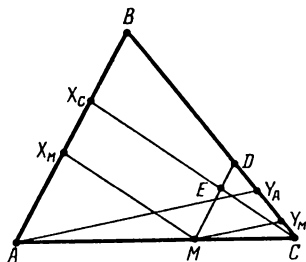


Рис. 11

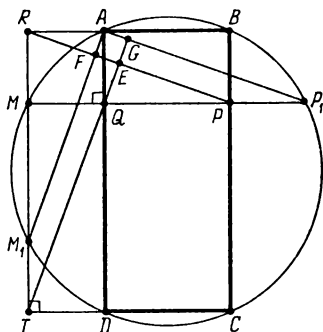


Рис. 12

сторон  $AB$  и  $CD$  (рис. 12). Обозначим через  $M_1$  и  $P_1$  вторые точки пересечения прямых  $RT$  и  $QP$  с окружностью.

Так как  $TM_1 = RM = AQ$  и  $TM_1 \parallel AQ$ , то  $AM_1 \parallel TQ$ . Аналогично  $AP_1 \parallel RP$ . Поскольку  $\angle M_1AP_1 = 90^\circ$ , то  $RP \perp TQ$ .

Обозначим точки пересечения прямых  $TQ$  и  $RP$ ,  $M_1A$  и  $RP$ ,  $P_1A$  и  $TQ$  через  $E, F, G$  соответственно. Чтобы доказать, что точка  $E$  лежит на прямой  $AC$ , достаточно доказать, что прямоугольники  $AFEG$  и  $AM_1CP_1$  подобны. Так как  $\angle ARF = \angle AM_1R = \angle M_1TG = \angle M_1CT$ , можно обозначить величины этих углов одной буквой  $\alpha$ .  $AF = RA \sin \alpha = M_1A \sin^2 \alpha$ ,  $AG = M_1T \sin \alpha \equiv M_1C \sin^2 \alpha$ , поэтому прямоугольники  $AFEG$  и  $AM_1CP_1$  подобны.

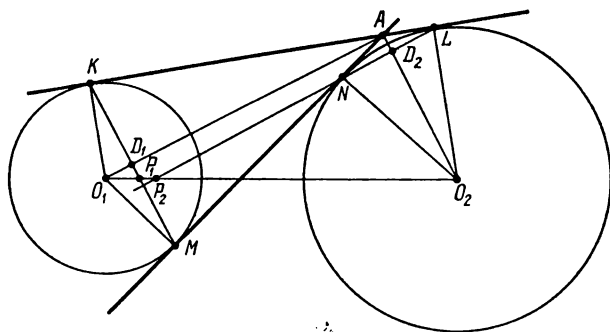


Рис. 13

**1.66.** Обозначим центры окружностей через  $O_1$  и  $O_2$ . Внешняя касательная касается первой окружности в точке  $K$ , а второй окружности в точке  $L$ ; внутренняя касательная касается первой окружности в точке  $M$ , а второй окружности в точке  $N$  (рис. 13). Пусть прямые  $KM$  и  $LN$  пересекают прямую  $O_1O_2$  в точках  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Надо доказать, что  $P_1 = P_2$ . Рассмотрим точки  $A$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  пересечения прямых  $KL$  и  $MN$ ,  $KM$  и  $O_1A$ ,  $LN$  и  $O_2A$  соответственно.  $\angle O_1AM + \angle NAO_2 = 90^\circ$ , поэтому прямоугольные треугольники  $O_1MA$  и  $ANO_2$  подобны, а также  $AO_2 \parallel KM$  и  $AO_1 \parallel LN$ . Из параллельности этих прямых получаем  $AD_1 : D_1O_1 = O_2P_1 : P_1O_1$  и  $D_2O_2 : AD_2 = O_2P_2 : P_2O_1$ . Из подобия четырехугольников  $AKO_1M$  и  $O_2NAL$  получаем  $AD_1 : D_1O_1 = D_2O_2 : AD_2$ . Следовательно,  $O_2P_1 : P_1O_1 = O_2P_2 : P_2O_1$ , т. е.  $P_1 = P_2$ .

## Глава 2

# ВПИСАННЫЙ УГОЛ

---

### Основные сведения

1. Угол  $ABC$ , вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют *вписанным* в окружность. Пусть  $O$  — центр окружности. Тогда

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC,$$

если точки  $B$  и  $O$  лежат по одну сторону от  $AC$ , и

$$\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOC,$$

если точки  $B$  и  $O$  лежат по разные стороны от  $AC$ . Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме  $180^\circ$ .

2. Величина угла между хордой  $AB$  и касательной к окружности, проходящей через точку  $A$ , равна половине угловой величины дуги  $AB$ .

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме  $180^\circ$ . Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие «ориентированный угол между прямыми». Величиной *ориентированного угла между прямыми  $AB$  и  $CD$*  (обозначение:  $\angle(AB, CD)$ ) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую  $AB$  так, чтобы она стала параллельна прямой  $CD$ . При этом углы, отличающиеся на  $n \cdot 180^\circ$ , считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми  $CD$  и  $AB$  не равен ориентированному углу между прямыми  $AB$  и  $CD$  (они составляют в сумме  $180^\circ$  или, что по нашему соглашению то же самое,  $0^\circ$ ).

Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

а)  $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$ ;

б)  $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$ ;

в) точки  $A, B, C, D$ , не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда  $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$  (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки  $B$  и  $D$  лежат по одну сторону от  $AC$ ; точки  $B$  и  $D$  лежат по разные стороны от  $AC$ ).

## Вводные задачи

1. а) Из точки  $A$ , лежащей вне окружности, выходят лучи  $AB$  и  $AC$ , пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла  $BAC$  равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла  $BAC$  расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла  $BAC$  равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла  $BAC$  и внутри угла, симметричного ему относительно вершины  $A$ .

2. Из точки  $P$ , расположенной внутри острого угла  $BAC$ , опущены перпендикуляры  $PC_1$  и  $PB_1$  на прямые  $AB$  и  $AC$ . Докажите, что  $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$ .

3. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного  $n$ -угольника, кратны  $180^\circ/n$ .

4. Центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  симметричен центру описанной окружности относительно стороны  $AB$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

5. Биссектриса внешнего угла при вершине  $C$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ . Докажите, что  $AD = BD$ .

## § 1. Углы, опирающиеся на равные дуги

2.1. Вершина  $A$  остроугольного треугольника  $ABC$  соединена отрезком с центром  $O$  описанной окружности. Из вершины  $A$  проведена высота  $AH$ . Докажите, что  $\angle BAH = \angle OAC$ .

2.2. Две окружности пересекаются в точках  $M$  и  $K$ . Через  $M$  и  $K$  проведены прямые  $AB$  и  $CD$  соответственно, пересекающие первую окружность в точках  $A$  и  $C$ , вторую в точках  $B$  и  $D$ . Докажите, что  $AC \parallel BD$ .

2.3. Из произвольной точки  $M$ , лежащей внутри данного угла с вершиной  $A$ , опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на стороны угла. Из точки  $A$  опущен перпендикуляр  $AK$  на отрезок  $PQ$ . Докажите, что  $\angle PAK = \angle MAQ$ .

2.4. а) Продолжение биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $M$ ;  $O$  — центр вписанной окружности,  $O_B$  — центр невписанной окружности, касающейся стороны  $AC$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $O$  и  $O_B$  лежат на окружности с центром  $M$ .

б) Точка  $O$ , лежащая внутри треугольника  $ABC$ , обладает тем свойством, что прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  проходят через центры описанных окружностей треугольников  $BCO$ ,  $ACO$  и  $ABO$ . Докажите, что  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .



2.5. Вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  скользят по сторонам прямого угла с вершиной  $P$ . Докажите, что точка  $C$  перемещается при этом по отрезку.

2.6. Диагональ  $AC$  квадрата  $ABCD$  совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника  $ACK$ , причем точки  $B$  и  $K$  лежат по одну сторону от прямой  $AC$ . Докажите, что  $BK = |AK - CK|/\sqrt{2}$  и  $DK = (AK + CK)/\sqrt{2}$ .

2.7. В треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что если  $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ , то  $AC = BC$ .

2.8. Все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ . Докажите, что внутри его существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом  $120^\circ$ .

2.9. Окружность разделена на равные дуги  $n$  диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки  $M$ , лежащей внутри окружности, на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

2.10. На окружности даны точки  $A, B, M$  и  $N$ . Из точки  $M$  проведены хорды  $MA_1$  и  $MB_1$ , перпендикулярные прямым  $NB$  и  $NA$  соответственно. Докажите, что  $AA_1 \parallel BB_1$ .

2.11. Шестиугольник  $ABCDEF$  вписанный, причем  $AB \parallel DE$  и  $BC \parallel EF$ . Докажите, что  $CD \parallel AF$ .

2.12. Многоугольник  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  вписанный. Про все пары его противоположных сторон, кроме одной, известно, что они параллельны. Докажите, что при  $n$  нечетном оставшаяся пара сторон тоже параллельна, а при  $n$  четном оставшаяся пара сторон равна по длине.

2.13. Дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что существует два семейства правильных треугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через точки  $A, B$  и  $C$ . Докажите также, что центры треугольников этих семейств лежат на двух concentрических окружностях.

## § 2. Величина угла между двумя хордами

Решить задачи этого параграфа помогает следующий факт. Пусть  $A, B, C, D$  — точки на окружности в указанном порядке. Тогда угол между хордами  $AC$  и  $BD$  равен  $(\sphericalangle AB + \sphericalangle CD)/2$ , угол между хордами  $AB$  и  $CD$  равен  $|\sphericalangle AD - \sphericalangle CB|/2$ . (Для доказательства нужно через конец одной из хорд провести хорду, параллельную другой хорде.)

2.14. На окружности даны точки  $A, B, C, D$  в указанном порядке.  $M$  — середина дуги  $AB$ . Обозначим точки пересечения хорд  $MC$  и  $MD$  с хордой  $AB$  через  $E$  и  $K$ . Докажите, что  $KECD$  — вписанный четырехугольник.

2.15. По стороне правильного треугольника катится окружность радиуса, равного его высоте. Докажите, что угловая

величина дуги, высекаемой на окружности сторонами треугольника, всегда равна  $60^\circ$ .

2.16. Диагонали равнобедренной трапеции  $ABCD$  с боковой стороной  $AB$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что центр  $O$  ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника  $APB$ .

2.17. На окружности даны точки  $A, B, C, D$  в указанном порядке;  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  — середины дуг  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соответственно. Докажите, что  $A_1C_1 \perp B_1D_1$ .

2.18. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $P$  так, что  $\angle BPC = \angle A + 60^\circ$ ,  $\angle APC = \angle B + 60^\circ$  и  $\angle APB = \angle C + 60^\circ$ . Прямые  $AP, BP$  и  $CP$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A', B'$  и  $C'$ . Докажите, что треугольник  $A'B'C'$  правильный.

2.19. На окружности взяты точки  $A, C_1, B, A_1, C, B_1$  в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  являются биссектрисами углов треугольника  $ABC$ , то они являются высотами треугольника  $A_1B_1C_1$ .

б) Докажите, что если прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  являются высотами треугольника  $ABC$ , то они являются биссектрисами углов треугольника  $A_1B_1C_1$ .

2.20. В окружность вписаны треугольники  $T_1$  и  $T_2$ , причем вершины треугольника  $T_2$  являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника  $T_1$ . Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников  $T_1$  и  $T_2$ , диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника  $T_1$  и пересекаются в одной точке.

### § 3. Угол между касательной и хордой

2.21. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $A$  первой окружности проведены прямые  $AP$  и  $AQ$ , пересекающие вторую окружность в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что касательная в точке  $A$  к первой окружности параллельна прямой  $BC$ .

2.22. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $P$ . Через точку  $A$  проведена касательная  $AB$  к окружности  $S_1$ , а через точку  $P$  — прямая  $CD$ , параллельная  $AB$  (точки  $B$  и  $C$  лежат на  $S_2$ , точка  $D$  — на  $S_1$ ). Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

2.23. Касательная в точке  $A$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ ;  $AD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $AE = ED$ .

**2.24.** Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точке  $A$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая  $S_1$  в точке  $B$ ,  $S_2$  в точке  $C$ . В точках  $C$  и  $B$  проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке  $D$ . Докажите, что угол  $BDC$  не зависит от выбора прямой, проходящей через  $A$ .

**2.25.** Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Из точки  $A$  к этим окружностям проведены касательные  $AM$  и  $AN$  ( $M$  и  $N$  — точки окружностей). Докажите, что:

а)  $\angle ABN + \angle MAN = 180^\circ$ ;

б)  $BM/BN = (AM/AN)^2$ .

**2.26.** Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $P$ , так, что треугольник  $ABP$  равносторонний. Докажите, что  $\angle PCD = 15^\circ$ .

**2.27.** Две окружности касаются внутренним образом в точке  $M$ . Пусть  $AB$  — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке  $T$ . Докажите, что  $MT$  — биссектриса угла  $AMB$ .

**2.28.** Через точку  $M$ , лежащую внутри окружности  $S$ , проведена хорда  $AB$ ; из точки  $M$  опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на касательные, проходящие через точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что величина  $1/PM + 1/QM$  не зависит от выбора хорды, проходящей через точку  $M$ .

**2.29.** Окружность  $S_1$  касается сторон угла  $ABC$  в точках  $A$  и  $C$ . Окружность  $S_2$  касается прямой  $AC$  в точке  $C$  и проходит через точку  $B$ , окружность  $S_1$  она пересекает в точке  $M$ . Докажите, что прямая  $AM$  делит отрезок  $BC$  пополам.

**2.30.** Окружность  $S$  касается окружностей  $S_1$  и  $S_2$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ ;  $B$  — точка окружности  $S$ , а  $K_1$  и  $K_2$  — вторые точки пересечения прямых  $A_1B$  и  $A_2B$  с окружностями  $S_1$  и  $S_2$ . Докажите, что если прямая  $K_1K_2$  касается окружности  $S_1$ , то она касается и окружности  $S_2$ .

#### § 4. Связь величины угла с длиной дуги и хорды

**2.31.** В окружность вписаны равнобедренные трапеции  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что  $AC = A_1C_1$ .

**2.32.** Из точки  $M$ , двигающейся по окружности, опускаются перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на диаметры  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что длина отрезка  $PQ$  не зависит от положения точки  $M$ .

**2.33.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ , биссектрисы  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $OD = OE$ .

**2.34.** В треугольнике  $ABC$  углы при вершинах  $B$  и  $C$  равны  $40^\circ$ ;  $BD$  — биссектриса угла  $B$ . Докажите, что  $BD + DA = BC$ .

2.35. На хорде  $AB$  окружности  $S$  с центром  $O$  взята точка  $C$ . Описанная окружность треугольника  $AOC$  пересекает окружность  $S$  в точке  $D$ . Докажите, что  $BC=CD$ .

2.36. Вершины  $A$  и  $B$  правильного треугольника  $ABC$  лежат на окружности  $S$ , а вершина  $C$  — внутри этой окружности. Точка  $D$  лежит на окружности  $S$ , причем  $BD=AB$ . Прямая  $CD$  пересекает  $S$  в точке  $E$ . Докажите, что длина отрезка  $EC$  равна радиусу окружности  $S$ .

2.37. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка  $K$  подвижной окружности?

## § 5. Четыре точки, лежащие на одной окружности

2.38. Из произвольной точки  $M$  катета  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  на гипотенузу  $AB$  опущен перпендикуляр  $MN$ . Докажите, что  $\angle MAN = \angle MCN$ .

2.39. Диагонали трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$ ; точки  $B'$  и  $C'$  симметричны вершинам  $B$  и  $C$  относительно биссектрисы угла  $BOC$ . Докажите, что  $\angle C'AC = \angle B'DB$ .

2.40. Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что точки пересечения биссектрис углов  $AQB$  и  $BPC$  со сторонами четырехугольника являются вершинами ромба.

2.41. Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $MN$  и биссектрисы угла  $B$  (или ее продолжения). Докажите, что:

а)  $\angle BPC = 90^\circ$ ;

б)  $S_{ABP} : S_{ABC} = 1 : 2$ .

2.42. Внутри четырехугольника  $ABCD$  взята точка  $M$  так, что  $ABMD$  — параллелограмм. Докажите, что если  $\angle CBM = \angle CDM$ , то  $\angle ACD = \angle BCM$ .

2.43. Прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  взяты на прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  так, что  $\angle (PA_2, BC) = \angle (PB_2, CA) = \angle (PC_2, AB)$ . Докажите, что  $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ .

2.44. Вокруг правильного треугольника  $APQ$  описан прямоугольник  $ABCD$ , причем точки  $P$  и  $Q$  лежат на сторонах  $BC$  и  $CD$  соответственно;  $P'$  и  $Q'$  — середины сторон  $AP$  и  $AQ$ . Докажите, что треугольники  $BQ'C$  и  $CP'D$  правильные.

**2.45.** Докажите, что если для вписанного четырехугольника  $ABCD$  выполнено равенство  $CD = AD + BC$ , то точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $B$  лежит на стороне  $CD$ .

**2.46.** Диагонали  $AC$  и  $CE$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  разделены точками  $M$  и  $N$  так, что  $AM:AC = CN:CE = \lambda$ . Найдите  $\lambda$ , если известно, что точки  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

**2.47.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  имеют соответственно параллельные стороны, причем стороны  $AB$  и  $A_1B_1$  лежат на одной прямой. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения описанных окружностей треугольников  $A_1BC$  и  $AB_1C$ , содержит точку  $C_1$ .

**2.48.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Прямая  $KL$  параллельна  $CC_1$ , причем точки  $K$  и  $L$  лежат на прямых  $BC$  и  $B_1C_1$  соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $A_1KL$  лежит на прямой  $AC$ .

**2.49.** Через точку  $O$  пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  проведена прямая  $MN$  перпендикулярно  $CO$ , причем  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  соответственно. Прямые  $AO$  и  $BO$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $A'N$  и  $B'M$  лежит на описанной окружности.

## § 6. Вписанный угол и подобные треугольники

**2.50.** На окружности взяты точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что  $AC \cdot AD/AM = BC \cdot BD/BM$ .

**2.51.** На окружности даны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причем точка  $B$  более удалена от прямой  $l$ , касающейся окружности в точке  $A$ , чем  $C$ . Прямая  $AC$  пересекает прямую, проведенную через точку  $B$  параллельно  $l$ , в точке  $D$ . Докажите, что  $AB^2 = AC \cdot AD$ .

**2.52.** Прямая  $l$  касается окружности с диаметром  $AB$  в точке  $C$ ;  $M$  и  $N$  — проекции точек  $A$  и  $B$  на прямую  $l$ ,  $D$  — проекция точки  $C$  на  $AB$ . Докажите, что  $CD^2 = AM \cdot BN$ .

**2.53.** В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AH$ , а из вершин  $B$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $BB_1$  и  $CC_1$  на прямую, проходящую через точку  $A$ . Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle HB_1C_1$ .

**2.54.** На дуге  $BC$  окружности, описанной около равно-  
стороннего треугольника  $ABC$ , взята произвольная точка  $P$ .

Отрезки  $AP$  и  $BC$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что  $1/PQ = 1/PB + 1/PC$ .

2.55. На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  взяты точки  $E$  и  $F$  так, что  $\angle EAF = 45^\circ$ . Отрезки  $AE$  и  $AF$  пересекают диагональ  $BD$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $S_{AEF}/S_{APQ} = 2$ .

2.56. Прямая, проходящая через вершину  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$ , пересекает основание  $AB$  в точке  $M$ , а описанную окружность в точке  $N$ . Докажите, что  $CM \cdot CN = AC^2$  и  $CM/CN = AM \cdot BM / (AN \cdot BN)$ .

2.57. Дан параллелограмм  $ABCD$  с острым углом при вершине  $A$ . На лучах  $AB$  и  $CB$  отмечены точки  $H$  и  $K$  соответственно так, что  $CH = BC$  и  $AK = AB$ . Докажите, что:

а)  $DH = DK$ ;

б)  $\triangle DKN \sim \triangle ABK$ .

2.58. а) Стороны угла с вершиной  $C$  касаются окружности в точках  $A$  и  $B$ . Из точки  $P$ , лежащей на окружности, опущены перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Докажите, что  $PC_1^2 = PA_1 \cdot PB_1$ .

б) Из произвольной точки  $O$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $OA'$ ,  $OB'$ ,  $OC'$  на стороны треугольника  $ABC$  и перпендикуляры  $OA''$ ,  $OB''$ ,  $OC''$  на стороны треугольника с вершинами в точках касания. Докажите, что  $OA' \cdot OB' \cdot OC' = OA'' \cdot OB'' \cdot OC''$ .

2.59. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Расстояния от точки  $E$  до прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $AD$ .

2.60. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ ;  $B_2$  и  $C_2$  — середины высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что  $\triangle A_1B_2C_2 \sim \triangle ABC$ .

2.61. На высотах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , делящие их в отношении  $2:1$ , считая от вершины. Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ .

2.62. Окружность  $S_1$  с диаметром  $AB$  пересекают окружность  $S_2$  с центром  $A$  в точках  $C$  и  $D$ . Через точку  $B$  проведена прямая, пересекающая  $S_2$  в точке  $M$ , лежащей внутри  $S_1$ , а  $S_1$  в точке  $N$ . Докажите, что  $MN^2 = CN \cdot ND$ .

2.63. Через середину  $C$  произвольной хорды  $AB$  окружности проведены две хорды  $KL$  и  $MN$  (точки  $K$  и  $M$  лежат по одну сторону от  $AB$ ). Отрезки  $KN$  и  $ML$  пересекают  $AB$  в точках  $Q$  и  $P$ . Докажите, что  $PC = QC$ .

2.64. а) Окружность, проходящая через точку  $C$ , пересекает стороны  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ , а его описанную окружность в точке  $M$ . Докажите, что  $\triangle AB_1M \sim \triangle BA_1M$ .

б) На лучах  $AC$  и  $BC$  отложены отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$ , равные полупериметру треугольника  $ABC$ .  $M$  — такая точка его описанной окружности, что  $CM \parallel A_1B_1$ . Докажите, что  $\angle CMO = 90^\circ$ , где  $O$  — центр вписанной окружности

## § 7. Биссектриса делит дугу пополам

2.65. В треугольнике  $ABC$  стороны  $AC$  и  $BC$  не равны. Докажите, что биссектриса угла  $C$  делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этой вершины, тогда и только тогда, когда  $\angle C = 90^\circ$ .

2.66. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины  $C$ , делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

2.67. Докажите, что в любом треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AE$  лежит между медианой  $AM$  и высотой  $AH$ .

2.68. Дан треугольник  $ABC$ . На его стороне  $AB$  выбирается точка  $P$  и через нее проводятся прямые  $PM$  и  $PN$ , параллельные  $AC$  и  $BC$  соответственно (точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $BC$  и  $AC$ );  $Q$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $APN$  и  $BPM$ . Докажите, что все прямые  $PQ$  проходят через фиксированную точку.

2.69. Продолжение биссектрисы  $AD$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $E$ . Из точки  $D$  на стороны  $AB$  и  $AC$  опущены перпендикуляры  $DP$  и  $DQ$ . Докажите, что  $S_{ABC} = S_{APEQ}$ .

## § 8. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

В этом параграфе  $ABCD$  — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Мы будем использовать также следующие обозначения:  $O$  — центр описанной окружности четырехугольника  $ABCD$ ,  $P$  — точка пересечения диагоналей.

2.70. Докажите, что ломаная  $AOC$  делит  $ABCD$  на две фигуры равной площади.

2.71. Известен радиус описанной окружности  $R$ .

а) Найдите  $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ .

б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника  $ABCD$ .

2.72. Найдите сумму квадратов диагоналей, если известны длина отрезка  $OP$  и радиус окружности  $R$ .

2.73. Из вершин  $A$  и  $B$  опущены перпендикуляры на  $CD$ , пересекающие прямые  $BD$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Докажите, что  $AKLB$  — ромб.

**2.74.** Докажите, что площадь четырехугольника  $ABCD$  равна  $(AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$ .

**2.75.** Докажите, что расстояние от точки  $O$  до стороны  $AB$  равно половине длины стороны  $CD$ .

**2.76.** Докажите, что прямая, проведенная из точки  $P$  перпендикулярно  $BC$ , делит сторону  $AD$  пополам.

**2.77.** Докажите, что середины сторон четырехугольника  $ABCD$  и проекции точки  $P$  на стороны лежат на одной окружности.

**2.78.** а) Через вершины  $A, B, C$  и  $D$  проведены касательные к описанной окружности. Докажите, что образованный ими четырехугольник вписанный.

б) Четырехугольник  $KLMN$  вписанный и описанный одновременно;  $A$  и  $B$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $KL$  и  $LM$ . Докажите, что  $AK \cdot BM = r^2$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности.

### § 9. Три описанные окружности пересекаются в одной точке

**2.79.** На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены треугольники  $ABC'$ ,  $AB'C$  и  $A'BC$ , причем сумма углов при вершинах  $A', B'$  и  $C'$  кратна  $180^\circ$ . Докажите, что описанные окружности построенных треугольников пересекаются в одной точке.

**2.80.** а) На сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  (или на их продолжениях) взяты точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , отличные от вершин треугольника. Докажите, что описанные окружности треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$  пересекаются в одной точке.

б) Точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  перемещаются по прямым  $BC, CA$  и  $AB$  так, что все треугольники  $A_1B_1C_1$  подобны одному и тому же треугольнику. Докажите, что точка пересечения описанных окружностей треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$  остается при этом неподвижной. (Треугольники предполагаются не только подобными, но и одинаково ориентированными.)

**2.81.** На сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что если треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  подобны и противоположно ориентированы, то описанные окружности треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$  проходят через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**2.82.** Точки  $A', B'$  и  $C'$  симметричны некоторой точке  $P$  относительно сторон  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ .



а) Докажите, что описанные окружности треугольников  $AB'C'$ ,  $A'BC'$ ,  $A'B'C$  и  $ABC$  имеют общую точку.

б) Докажите, что описанные окружности треугольников  $A'BC$ ,  $AB'C$ ,  $ABC'$  и  $A'B'C'$  имеют общую точку  $Q$ .

в) Пусть  $I$ ,  $J$ ,  $K$  и  $O$  — центры описанных окружностей треугольников  $A'BC$ ,  $AB'C$ ,  $ABC'$  и  $A'B'C'$ . Докажите, что  $QI:OI = QJ:OJ = QK:OK$ .

## § 10. Точка Микеля

**2.83.** Четыре прямые образуют четыре треугольника.

а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (точка Микеля).

б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

**2.84.** Прямая пересекает стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника (или их продолжения) в точках  $C_1$ ,  $B_1$  и  $A_1$ ;  $O$ ,  $O_a$ ,  $O_b$  и  $O_c$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ ;  $H$ ,  $H_a$ ,  $H_b$  и  $H_c$  — ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а)  $\Delta O_a O_b O_c \sim \Delta ABC$ .

б) серединные перпендикуляры к отрезкам  $OH$ ,  $O_a H_a$ ,  $O_b H_b$  и  $O_c H_c$  пересекаются в одной точке.

**2.85.** Четырехугольник  $ABCD$  вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон.

**2.86.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на окружности с центром  $O$ . Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , а описанные окружности треугольников  $AEC$  и  $BED$  пересекаются в точках  $E$  и  $P$ . Докажите, что:

а) точки  $A$ ,  $D$ ,  $P$  и  $O$  лежат на одной окружности;

б)  $\angle EPO = 90^\circ$ .

**2.87.** Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

См. также задачу 19.45.

## § 11. Разные задачи

**2.88.** В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AH$ ;  $O$  — центр описанной окружности. Докажите, что  $\angle OAH = |\angle B - \angle C|$ .

**2.89.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ , а  $AA'$  — диаметр его описанной окружности. Докажите, что отрезок  $A'H$  делит сторону  $BC$  пополам.

**2.90.** Через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  проведены две параллельные прямые, а прямые  $m$  и  $n$  симметричны им относительно биссектрис соответствующих углов. Докажите, что точка пересечения прямых  $m$  и  $n$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**2.91.** а) Из точки  $A$  проведены прямые, касающиеся окружности  $S$  в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  и центр его внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ , лежат на окружности  $S$ .

б) Докажите, что окружность, проходящая через вершины  $B$  и  $C$  любого треугольника  $ABC$  и центр  $O$  его вписанной окружности, отсекает на прямых  $AB$  и  $AC$  равные хорды.

**2.92.** На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  внешним образом построены квадраты  $ACA_1A_2$  и  $BCB_1B_2$ . Докажите, что прямые  $A_1B$ ,  $A_2B_2$  и  $AB_1$  пересекаются в одной точке.

**2.93.** Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , причем касательные к  $S_1$  в этих точках являются радиусами  $S_2$ . На внутренней дуге  $S_1$  взята точка  $C$  и соединена с точками  $A$  и  $B$  прямыми. Докажите, что вторые точки пересечения этих прямых с  $S_2$  являются концами одного диаметра.

**2.94.** Из центра  $O$  окружности опущен перпендикуляр  $OA$  на прямую  $l$ . На прямой  $l$  взяты точки  $B$  и  $C$  так, что  $AB=AC$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ , а вторая — в точках  $M$  и  $N$ . Прямые  $PM$  и  $QN$  пересекают прямую  $l$  в точках  $R$  и  $S$ . Докажите, что  $AR=AS$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**2.95.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ ;  $M$  — середина стороны  $AB$ . Докажите, что  $MA_1=MB_1$ .

**2.96.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $C$  прямые. Докажите, что  $AC=BD \sin ABC$ .

**2.97.** Диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  вписанного шестиугольника  $ABCDEF$  пересекаются в одной точке. Докажите, что  $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$ .

**2.98.** В выпуклом четырехугольнике  $AB=BC=CD$ ,  $M$  — точка пересечения диагоналей,  $K$  — точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $D$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $M$ ,  $K$  и  $D$  лежат на одной окружности.

**2.99.** Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $O_1A$  пересекает окружность с центром  $O_2$  в точке  $N$ . Докажите, что точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $B$  и  $N$  лежат на одной окружности.

**2.100.** Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $MN$  касается окружности  $S_1$  в точке  $M$  и окружности  $S_2$  в точке  $N$ . Пусть  $A$  — та из точек пересечения окружностей, которая более удалена от прямой  $MN$ . Докажите, что  $\angle O_1AO_2 = 2\angle MAN$ .

**2.101.** Дан четырехугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность, причем  $AB=BC$ . Докажите, что  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(DA + CD) \cdot h_b$ , где  $h_b$  — высота треугольника  $ABD$ , опущенная из вершины  $B$ .

**2.102.** Четырехугольник  $ABCD$  вписанный, причем  $AC$  — биссектриса угла  $DAB$ . Докажите, что  $AC \cdot BD = AD \cdot DC + AB \cdot BC$ .

**2.103.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины прямого угла  $C$  проведены биссектриса  $CM$  и высота  $CH$ .  $HD$  и  $HE$  — биссектрисы треугольников  $AHC$  и  $CHB$ . Докажите, что точки  $C, D, H, E$  и  $M$  лежат на одной окружности.

**2.104.** Две окружности проходят через вершину угла и точку его биссектрисы. Докажите, что отрезки, отсекаемые ими на сторонах угла, равны.

**2.105.** Треугольник  $BHC$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , достроен до параллелограмма  $BHCD$ . Докажите, что  $\angle BAD = \angle CAH$ .

**2.106.** Вне правильного треугольника  $ABC$ , но внутри угла  $BAC$  взята точка  $M$  так, что  $\angle CMA = 30^\circ$  и  $\angle BMA = \alpha$ . Чему равен угол  $ABM$ ?

**2.107.** Докажите, что если вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является также и описанным, то он симметричен относительно одной из диагоналей.

## Решения

**2.1.** Проведем диаметр  $AD$ . Тогда  $\angle CDA = \angle CBA$ , а значит,  $\angle BAN = \angle DAC$ , так как  $\angle BHA = \angle ACD = 90^\circ$ .

**2.2.** Воспользуемся свойствами ориентированных углов.  $\angle(AC, CK) = \angle(AM, MK) = \angle(BM, MK) = \angle(BD, DK) = \angle(BD, CK)$ , т. е.  $AC \parallel BD$ .

**2.3.** Точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $AM$ . Поэтому  $\angle QMA = \angle QPA$  как углы, опирающиеся на одну дугу. Треугольники  $PAK$  и  $MAQ$  прямоугольные, следовательно,  $\angle PAK = \angle MAQ$ .

**2.4.** а) Так как  $\angle AOM = \angle BAO + \angle ABO = (\angle A + \angle B)/2$  и  $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \angle A/2 + \angle CBM = (\angle A + \angle B)/2$ , то  $MA = MO$ . Аналогично  $MC = MO$ .

Так как треугольник  $ОАО_b$  прямоугольный и  $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$ , то  $\angle MAO_b = \angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$ , а значит,  $MA = MO_b$ . Аналогично  $MC = MO_b$ .

б) Пусть  $P$  — центр описанной окружности треугольника  $АСО$ . Тогда  $\angle COP = (180^\circ - \angle CPO)/2 = 90^\circ - \angle OAC$ . Поэтому  $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAC$ . Аналогично  $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAB$ , а значит,  $\angle OAB = \angle OAC$ . Аналогично доказывается, что точка  $O$  лежит на биссектрисах углов  $B$  и  $C$ .

2.5. Точки  $P$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ , поэтому  $\angle APC = \angle ABC$ , т. е. величина угла  $APC$  постоянна.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для любого треугольника  $ABC$ , вершины которого скользят по сторонам угла  $MPN$ , равного  $180^\circ - \angle C$ .

2.6. Точки  $B$ ,  $D$  и  $K$  лежат на окружности с диаметром  $AC$ . Пусть для определенности  $\angle KCA = \varphi \leq 45^\circ$ . Тогда  $BK = AC \sin(45^\circ - \varphi) = AC (\cos \varphi - \sin \varphi)/\sqrt{2}$  и  $DK = AC \sin(45^\circ + \varphi) = AC (\cos \varphi + \sin \varphi)/\sqrt{2}$ . Ясно, что  $AC \cos \varphi = CK$  и  $AC \sin \varphi = AK$ .

2.7. Так как  $\angle B_1AA_1 = \angle A_1BB_1$ , точки  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  и  $B_1$  лежат на одной окружности. Параллельные прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  отсекают на ней равные хорды  $AB_1$  и  $BA_1$ . Поэтому  $AC = BC$ .

2.8. Построим на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  внешним образом правильный треугольник  $A_1BC$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $AA_1$  с описанной окружностью треугольника  $A_1BC$ . Тогда точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$  и  $\angle APC = 180^\circ - \angle A_1PC = 180^\circ - \angle A_1BC = 120^\circ$ . Аналогично  $\angle APB = 120^\circ$ .

2.9. Основания перпендикуляров, опущенных из точки  $M$  на диаметры, лежат на окружности  $S$  с диаметром  $OM$  ( $O$  — центр исходной окружности). Точки пересечения данных диаметров с окружностью  $S$ , отличные от точки  $O$ , делят ее на  $n$  дуг. Так как на все дуги, не содержащие точку  $O$ , опираются углы  $180^\circ/n$ , то угловые величины этих дуг равны  $360^\circ/n$ . Поэтому угловая величина дуги, на которой лежит точка  $O$ , равна  $360^\circ - (n-1) \cdot 360^\circ/n = 360^\circ/n$ . Следовательно, основания перпендикуляров делят окружность  $S$  на  $n$  равных дуг.

2.10. Ясно, что  $\angle(AA_1, BB_1) = \angle(AA_1, AB_1) + \angle(AB_1, BB_1) = \angle(MA_1, MB_1) + \angle(AN, BN)$ . Так как  $MA_1 \perp BN$  и  $MB_1 \perp AN$ , то  $\angle(MA_1, MB_1) = \angle(BN, AN) = -\angle(AN, BN)$ . Поэтому  $\angle(AA_1, BB_1) = 0^\circ$ , т. е.  $AA_1 \parallel BB_1$ .

2.11. Так как  $AB \parallel DE$ , то  $\angle ACE = \angle BFD$ , а так как  $BC \parallel EF$ , то  $\angle CAE = \angle BDF$ . Треугольники  $ACE$  и  $BDF$  имеют по два равных угла, поэтому третьи углы у них тоже равны. Из равенства этих углов следует равенство дуг  $AC$  и  $DF$ , т. е. параллельность хорд  $CD$  и  $AF$ .

2.12. Доказательство проведем индукцией по  $n$ . Для четырехугольника утверждение очевидно, для шестиугольника оно было доказано

в предыдущей задаче. Допустим, что утверждение доказано для  $2(n-1)$ -угольника, и докажем его для  $2n$ -угольника. Пусть  $A_1 \dots A_{2n}$  есть  $2n$ -угольник, в котором  $A_1 A_2 \parallel A_{n+1} A_{n+2}, \dots, A_{n-1} A_n \parallel A_{2n-1} A_{2n}$ . Рассмотрим  $2(n-1)$ -угольник  $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_{n+1} \dots A_{2n-1}$ . По предположению индукции при нечетном  $n$  получаем  $A_{n-1} A_{n+1} = A_{2n-1} A_1$ , при четном  $n$  получаем  $A_{n-1} A_{n+1} \parallel A_{2n-1} A_1$ .

Рассмотрим треугольник  $A_{n-1} A_n A_{n+1}$  и треугольник  $A_{2n-1} A_{2n} A_1$ . Пусть  $n$  четно. Тогда векторы  $\overrightarrow{A_{n-1} A_n}$  и  $\overrightarrow{A_{2n-1} A_{2n}}$ ,  $\overrightarrow{A_{n-1} A_{n+1}}$  и  $\overrightarrow{A_{2n-1} A_1}$  параллельны и противоположно направлены, поэтому  $\angle A_n A_{n-1} A_{n+1} = \angle A_1 A_{2n-1} A_{2n}$  и  $A_n A_{n+1} = A_{2n} A_1$  как хорды, отсекающие равные дуги, что и требовалось. Пусть  $n$  нечетно. Тогда  $A_{n-1} A_{n+1} = A_{2n-1} A_1$ , т. е.  $A_1 A_{n-1} \parallel A_{n+1} A_{2n-1}$ . В шестиугольнике  $A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{2n-1} A_{2n} A_1$  имеем  $A_1 A_{n-1} \parallel A_{n+1} A_{2n-1}$ ,  $A_{n-1} A_n \parallel A_{2n-1} A_{2n}$ , поэтому согласно предыдущей задаче  $A_n A_{n+1} \parallel A_{2n} A_1$ , что и требовалось.

**2.13.** Пусть прямые  $FG$ ,  $GE$  и  $EF$  проходят через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , причем треугольник  $EFG$  равносторонний, т. е.  $\angle(GE, EF) = \angle(EF, FG) = \angle(FG, GE) = \pm 60^\circ$ . Тогда  $\angle(BE, EC) = \angle(CF, FA) = \angle(AG, GB) = \pm 60^\circ$ . Выбрав один из знаков, получим три окружности  $S_E$ ,  $S_F$  и  $S_G$ , на которых должны лежать точки  $E$ ,  $F$  и  $G$ . Любая точка  $E$  окружности  $S_E$  однозначно определяет треугольник  $EFG$ .

Пусть  $O$  — центр треугольника  $EFG$ ;  $P$ ,  $R$  и  $Q$  — точки пересечения прямых  $OE$ ,  $OF$  и  $OG$  с соответствующими окружностями  $S_E$ ,  $S_F$  и  $S_G$ . Докажем, что  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — центры правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника  $ABC$  (для одного семейства внешним образом, для другого внутренним), а точка  $O$  лежит на описанной окружности треугольника  $PQR$ . Ясно, что  $\angle(CB, BP) = \angle(CE, EP) = \angle(EF, EO) = \mp 30^\circ$ , а  $\angle(BP, CP) = \angle(BE, EC) = \angle(GE, EF) = \pm 60^\circ$ . Поэтому  $\angle(CB, CP) = \angle(CB, BP) + \angle(BP, CP) = \pm 30^\circ$ . Следовательно,  $P$  — центр правильного треугольника со стороной  $AB$ . Для точек  $Q$  и  $R$  доказательство аналогично. Треугольник  $PQR$  равносторонний, причем его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$  (см. задачу 1.49, б). Можно проверить, что  $\angle(PR, RQ) = \mp 60^\circ = \angle(OE, OG) = \angle(OP, OQ)$ , т. е. точка  $O$  лежит на описанной окружности треугольника  $PQR$ .

**2.14.** Ясно, что  $2(\angle KEC + \angle KDC) = (\sim MB + \sim AC) + (\sim MB + \sim BC) = 360^\circ$ , так как  $\sim MB = \sim AM$ .

**2.15.** Обозначим угловую величину дуги, отсекаемой сторонами треугольника  $ABC$  на окружности, через  $\alpha$ . Рассмотрим дугу, отсекаемую продолжениями сторон треугольника на окружности, и обозначим ее угловую величину через  $\alpha'$ . Тогда  $(\alpha + \alpha')/2 = \angle BAC = 60^\circ$ . Но  $\alpha = \alpha'$ , так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно стороне  $BC$ . Поэтому  $\alpha = \alpha' = 60^\circ$ .

2.16. Так как  $\angle APB = (\sphericalangle AB + \sphericalangle CD)/2 = \angle AOB$ , точка  $O$  лежит на описанной окружности треугольника  $APB$ .

2.17. Пусть  $O$  — точка пересечения прямых  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  — угловые величины дуг  $AB, BC, CD$  и  $DA$ . Тогда  $\angle A_1OB_1 = (\sphericalangle A_1B + \sphericalangle BB_1 + \sphericalangle C_1D + \sphericalangle DD_1)/2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)/4 = 90^\circ$ .

2.18. Складывая равенства  $\sphericalangle C'A + \sphericalangle CA' = 2(180^\circ - \angle APC) = 240^\circ - 2\angle B$  и  $\sphericalangle AB' + \sphericalangle BA' = 240^\circ - 2\angle C$ , а затем вычитая из их суммы равенство  $\sphericalangle BA' + \sphericalangle CA' = 2\angle A$ , получаем  $\sphericalangle C'B' = \sphericalangle C'A + \sphericalangle AB' = 480^\circ - 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 120^\circ$ . Аналогично  $\sphericalangle B'A' = \sphericalangle C'A' = 120^\circ$ .

2.19. а) Докажем, например, что  $AA_1 \perp C_1B_1$ . Пусть  $M$  — точка пересечения этих отрезков. Тогда  $\angle AMB_1 = (\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle A_1B + \sphericalangle BC_1)/2 = \angle ABB_1 + \angle A_1AB + \angle BCC_1 = (\angle B + \angle A + \angle C)/2 = 90^\circ$ .

б) Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — точки пересечения отрезков  $AA_1$  и  $BC$ .  $BB_1$  и  $AC$ . Прямоугольные треугольники  $AM_1C$  и  $BM_2C$  имеют общий угол  $C$ , поэтому  $\angle B_1BC = \angle A_1AC$ , а значит,  $\sphericalangle B_1C = \sphericalangle A_1C$  и  $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$ , т. е.  $CC_1$  — биссектриса угла  $A_1C_1B_1$ .

2.20. Обозначим вершины треугольника  $T_1$  через  $A, B$  и  $C$ ; середины дуг  $BC, CA, AB$  через  $A_1, B_1, C_1$ . Тогда  $T_2 = A_1B_1C_1$ . Прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  являются биссектрисами треугольника  $T_1$ , поэтому они пересекаются в одной точке  $O$ . Пусть прямые  $AB$  и  $C_1B_1$  пересекаются в точке  $K$ . Достаточно проверить, что  $KO \parallel AC$ . В треугольнике  $AB_1O$  прямая  $B_1C_1$  является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный. Следовательно, треугольник  $AKO$  тоже равнобедренный. Прямые  $KO$  и  $AC$  параллельны, так как  $\angle KOA = \angle KAO = \angle OAC$ .

2.21. Пусть  $l$  — касательная в точке  $A$  к первой окружности. Тогда  $\angle(l, AP) = \angle(AQ, PQ) = \angle(BC, PB)$ , а значит,  $l \parallel BC$ .

2.22. Так как  $\angle(AB, AD) = \angle(AP, PD) = \angle(AB, BC)$ , то  $BC \parallel AD$ .

2.23. Пусть для определенности точка  $E$  лежит на луче  $BC$ . Тогда  $\angle ABC = \angle EAC$  и  $\angle ADE = \angle ABC + \angle BAD = \angle EAC + \angle CAD = \angle DAE$ .

2.24. Пусть  $P$  — вторая точка пересечения окружностей. Тогда  $\angle(AB, DB) = \angle(PA, PB)$  и  $\angle(DC, AC) = \angle(PC, PA)$ . Складывая эти равенства, получаем  $\angle(DC, DB) = \angle(PC, PB) = \angle(PC, CA) + \angle(BA, PB)$ ; последние два угла опираются на постоянные дуги.

2.25. а) Так как  $\angle MAB = \angle BNA$ , то сумма углов  $ABN$  и  $MAN$  равна сумме углов треугольника  $ABN$ .

б) Так как  $\angle BAM = \angle BNA$  и  $\angle BAN = \angle BMA$ , то  $\triangle AMB \sim \triangle NAB$ , а значит,  $AM:NA = MB:AB$  и  $AM:NA = AB:NB$ . Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

2.26. Точка  $P$  лежит на окружности радиуса  $BC$  с центром  $B$ , а прямая  $DC$  касается этой окружности в точке  $C$ . Поэтому  $\angle PCD = \angle PBC/2 = 15^\circ$ .

2.27. Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — точки пересечения прямых  $MA$  и  $MB$  с меньшей окружностью. Так как  $M$  — центр гомотетии окружностей, то  $A_1B_1 \parallel AB$ . Поэтому  $\angle A_1MT = \angle A_1TA = \angle B_1A_1T = \angle B_1MT$ .

2.28. Пусть  $\varphi$  — угол между хордой  $AB$  и касательной, проходящей через один из ее концов. Тогда  $AB = 2R \sin \varphi$ , где  $R$  — радиус окружности  $S$ . Кроме того,  $PM = AM \sin \varphi$  и  $QM = BM \sin \varphi$ . Поэтому

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{QM} = ((AM + BM)/\sin \varphi) \cdot AM \cdot BM = 2R/(AM \cdot BM). \quad \text{Величина}$$

$AM \cdot BM$  не зависит от выбора хорды  $AB$ .

2.29. Пусть прямая  $AM$  пересекает окружность  $S_2$  в точке  $D$ . Тогда  $\angle MDC = \angle MCA = \angle MAB$ , поэтому  $CD \parallel AB$ . Далее,  $\angle CAM = \angle MCB = \angle MDB$ , поэтому  $AC \parallel BD$ . Таким образом,  $ABDC$  — параллелограмм, и его диагональ  $AD$  делит диагональ  $BC$  пополам.

2.30. Проведем прямую  $l_1$ , касающуюся  $S_1$  в точке  $A_1$ . Прямая  $K_1K_2$  касается  $S_1$  тогда и только тогда, когда  $\angle(K_1K_2, K_1A_1) = \angle(K_1A_1, l_1)$ . Ясно также, что  $\angle(K_1A_1, l_1) = \angle(A_1B, l_1) = \angle(A_2B, A_1A_2)$ . Аналогично прямая  $K_1K_2$  касается  $S_2$  тогда и только тогда, когда  $\angle(K_1K_2, K_2A_2) = \angle(A_1B, A_1A_2)$ . Остается заметить, что если  $\angle(K_1K_2, K_1A_1) = \angle(A_2B, A_1A_2)$ , то  $\angle(K_1K_2, K_2A_2) = \angle(K_1K_2, A_2B) = \angle(K_1K_2, A_1B) + \angle(A_1B, A_1A_2) + \angle(A_1A_2, A_2B) = \angle(A_1B, A_1A_2)$ .

2.31. На хорды  $AC$  и  $A_1C_1$  опираются равные углы  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , поэтому  $AC = A_1C_1$ .

2.32. Обозначим центр окружности через  $O$ . Точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $OM$ , т. е. точки  $O, P, Q$  и  $M$  лежат на окружности постоянного радиуса  $R/2$ . При этом либо  $\angle POQ = \angle AOD$ , либо  $\angle POQ = \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD$ , т. е. длина хорды  $PQ$  постоянна.

2.33. Так как  $\angle AOC = 90^\circ + \angle B/2$  (см. задачу 5.3), то  $\angle EBD + \angle EOD = 90^\circ + 3\angle B/2 = 180^\circ$ , а значит, четырехугольник  $BEOD$  вписанный. На хорды  $EO$  и  $OD$  опираются равные углы  $EBO$  и  $OBD$ , поэтому  $EO = OD$ .

2.34. Возьмем на продолжении отрезка  $BD$  за точку  $D$  такую точку  $Q$ , что  $\angle ACQ = 40^\circ$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $QC$ . Тогда  $\angle BPC = 60^\circ$  и  $D$  — точка пересечения биссектрис углов треугольника  $BCP$ . Согласно задаче 2.33  $AD = DQ$ . Кроме того,  $\angle BQC = \angle BCQ = 80^\circ$ . Следовательно,  $BC = BD + DQ = BD + DA$ .

2.35. Достаточно проверить, что внешний угол  $ACD$  треугольника  $BCD$  в два раза больше угла при вершине  $B$ . Ясно, что  $\angle ACD = \angle AOD = 2\angle ABD$ .

2.36. Пусть  $O$  — центр окружности  $S$ . Точка  $B$  является центром описанной окружности треугольника  $ACD$ , поэтому  $\angle CDA = \angle ABC/2 = 30^\circ$ , а значит,  $\angle EOA = 2\angle EDA = 60^\circ$ , т. е. треугольник  $EOA$  равносторонний. Кроме того,  $\angle AEC = \angle AED = \angle AOB = 2\angle AOC$ , поэтому точка  $E$  является центром описанной окружности треугольника  $AOC$ . Следовательно,  $EC = EO$ .

**2.37.** Рассмотрим два положения подвижной окружности: в первый момент, когда точка  $K$  попадает на неподвижную окружность (точку касания окружностей в этот момент мы обозначим через  $K_1$ ), и какой-нибудь другой (второй) момент. Пусть  $O$  — центр неподвижной окружности,  $O_1$  и  $O_2$  — положения центра подвижной окружности в первый и во второй моменты соответственно,  $K_2$  — положение точки  $K$  во второй момент.  $A$  — точка касания окружностей во второй момент. Поскольку окружность катится без проскальзывания, длина дуги  $K_1A$  равна длине дуги  $K_2A$ . Так как радиус подвижной окружности в два раза меньше,  $\angle K_2O_2A = 2\angle K_1OA$ . Точка  $O$  лежит на подвижной окружности, поэтому  $\angle K_2OA = \angle K_2O_2A/2 = \angle K_1OA$ , т. е. точки  $K_2$ ,  $K_1$  и  $O$  лежат на одной прямой.

Траектория движения — диаметр неподвижной окружности.

**2.38.** Точки  $N$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $AM$ . Углы  $\angle MAN$  и  $\angle MCN$  опираются на одну дугу, поэтому они равны.

**2.39.** При симметрии относительно биссектрисы угла  $\angle BOC$  прямые  $AC$  и  $DB$  переходят друг в друга, поэтому нужно доказать, что  $\angle C'AB' = \angle B'DC'$ . Так как  $BO = B'O$ ,  $CO = C'O$  и  $AO : DO = CO : BO$ , то  $AO \cdot B'O = DO \cdot C'O$ , т. е. четырехугольник  $AC'B'D$  вписанный и  $\angle C'AB' = \angle B'DC'$ .

**2.40.** Обозначим точки пересечения и углы так, как показано на рис. 14. Достаточно проверить, что  $x = 90^\circ$ . Углы четырехугольника  $BMRN$  равны  $180^\circ - \varphi$ ,  $\alpha + \varphi$ ,  $\beta + \varphi$  и  $x$ , поэтому равенство  $x = 90^\circ$  эквивалентно равенству  $(2\alpha + \varphi) + (2\beta + \varphi) = 180^\circ$ . Остается заметить, что  $2\alpha + \varphi = \angle BAD$  и  $2\beta + \varphi = \angle BCD$ .

**2.41.** а) Достаточно доказать, что если  $P_1$  — точка биссектрисы угла  $B$  (или ее продолжения), из которой отрезок  $BC$  виден под углом  $90^\circ$ , то  $P_1$  лежит на прямой  $MN$ . Точки  $P_1$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $CO$ , где  $O$  — точка пересечения биссектрис, поэтому  $\angle (P_1N, NC) = \angle (P_1O, OC) = = (180^\circ - \angle A)/2 = \angle (MN, NC)$ .

б) Так как  $\angle BPC = 90^\circ$ , то  $BP = BC \cos(B/2)$ , поэтому  $S_{ABP} : S_{ABC} = (BP \sin(B/2)) : (BC \sin B) = 1 : 2$ .

**2.42.** Возьмем точку  $N$  так, что  $BN \parallel MC$  и  $NC \parallel BM$ . Тогда  $NA \parallel CD$ ,  $\angle NCB = \angle CBM = \angle CDM = \angle NAB$ , т. е. точки  $A$ ,  $B$ ,  $N$  и  $C$  лежат на одной окружности. Поэтому  $\angle ACD = = \angle NAC = \angle NBC = \angle BCM$ .

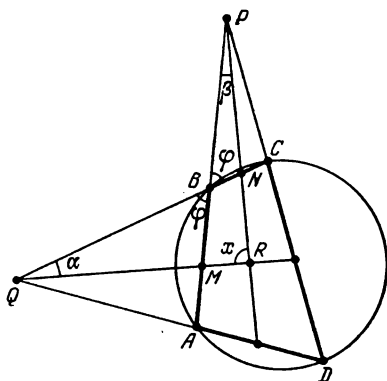


Рис. 14



2.43. Точки  $A_2, B_2, C$  и  $P$  лежат на одной окружности, поэтому  $\angle(A_2B_2, B_2P) = \angle(A_2C, CP) = \angle(BC, CP)$ . Аналогично  $\angle(B_2P, B_2C_2) = \angle(AP, AB)$ . Следовательно,  $\angle(A_2B_2, B_2C_2) = \angle(BC, CP) + \angle(AP, AB) = \angle(B_1B, B_1C_1) + \angle(A_1B_1, B_1B) = \angle(A_1B_1, B_1C_1)$ . Аналогично проверяется, что и все другие углы треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  равны или составляют в сумме  $180^\circ$ ; следовательно, эти треугольники подобны (см. задачу 5.42).

2.44. Точки  $Q'$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $PQ$ , поэтому  $\angle Q'CQ = \angle Q'PQ = 30^\circ$ . Следовательно,  $\angle BCQ' = 60^\circ$ . Аналогично  $\angle CBQ' = 60^\circ$ , а значит, треугольник  $BQ'C$  правильный. Аналогично треугольник  $CP'D$  правильный.

2.45. Пусть  $\angle BAD = 2\alpha$  и  $\angle CBA = 2\beta$ ; для определенности будем считать, что  $\alpha \geq \beta$ . Возьмем на стороне  $CD$  точку  $E$  так, что  $DE = DA$ . Тогда  $CE = CD - AD = CB$ . Угол при вершине  $C$  равнобедренного треугольника  $BCE$  равен  $180^\circ - 2\alpha$ , поэтому  $\angle CBE = \alpha$ . Аналогично  $\angle DAE = \beta$ . Биссектриса угла  $B$  пересекает  $CD$  в некоторой точке  $F$ . Так как  $\angle FBA = \beta = \angle AED$ , четырехугольник  $ABFE$  вписанный, а значит,  $\angle FAE = \angle FBE = \alpha - \beta$ . Следовательно,  $\angle FAD = \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$ , т. е.  $AF$  — биссектриса угла  $A$ .

2.46. Так как  $ED = CB$ ,  $EN = CM$  и  $\angle DEC = \angle BCA = 30^\circ$  (рис. 15), то  $\triangle EDN = \triangle CBM$ . Пусть  $\angle MBC = \angle NDE = \alpha$ ,  $\angle BMC = \angle END = \beta$ .

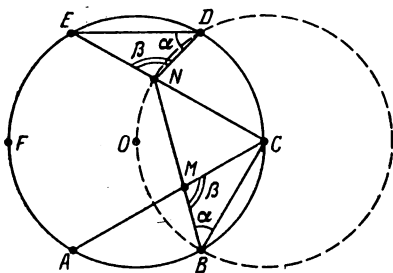


Рис. 15

Ясно, что  $\angle DNC = 180^\circ - \beta$ . Рассматривая треугольник  $BNC$ , получаем  $\angle BNC = 90^\circ - \alpha$ . Поскольку  $\alpha + \beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ , то  $\angle DNB = \angle DNC + \angle CNB = (180^\circ - \beta) + (90^\circ - \alpha) = 270^\circ - (\alpha + \beta) = 120^\circ$ . Поэтому точки  $B, O, N$  и  $D$  ( $O$  — центр шестиугольника) лежат на одной окружности. При этом  $CO = CB = CD$ , т. е.  $C$  — центр этой окружности,

следовательно,  $\lambda = CN : CE = CB : CA = 1 : \sqrt{3}$ .

2.47. Пусть  $D$  — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников  $A_1BC$  и  $AB_1C$ . Тогда  $\angle(AC, CD) = \angle(AB_1, B_1D)$  и  $\angle(DC, CB) = \angle(DA_1, A_1B)$ . Поэтому  $\angle(A_1C_1, C_1B_1) = \angle(AC, CB) = \angle(AC, CD) + \angle(DC, CB) = \angle(AB_1, B_1D) + \angle(DA_1, A_1B) = \angle(A_1D, DB_1)$ , т. е. точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D$  лежат на одной окружности. Следовательно,  $\angle(A_1C_1, C_1D) = \angle(A_1B_1, B_1D) = \angle(AC, CD)$ . Учитывая, что  $A_1C_1 \parallel AC$ , получаем требуемое.

2.48. Пусть точка  $M$  симметрична точке  $A_1$  относительно прямой  $AC$ . Согласно задаче 1.57 точка  $M$  лежит на прямой  $B_1C_1$ . Поэтому  $\angle(LM, MA_1) = \angle(C_1B_1, B_1A) = \angle(C_1C, CB) = \angle(LK, KA_1)$ , т. е.

точка  $M$  лежит на описанной окружности треугольника  $A_1KL$ . Следовательно, центр этой окружности лежит на прямой  $AC$  — серединном перпендикуляре к отрезку  $A_1M$ .

2.49. Пусть  $PQ$  — диаметр, перпендикулярный  $AB$ , причём  $Q$  и  $C$  лежат по одну сторону от  $AB$ ;  $L$  — точка пересечения прямой  $QO$  с описанной окружностью;  $M'$  и  $N'$  — точки пересечения прямых  $LB'$  и  $LA'$  со сторонами  $AC$  и  $BC$ . Достаточно проверить, что  $M'=M$  и  $N'=N$ .

Так как  $\sphericalangle PA + \sphericalangle AB' + \sphericalangle B'Q = 180^\circ$ , то  $\sphericalangle B'Q = \sphericalangle A$ , а значит,  $\sphericalangle B'LQ = \sphericalangle M'AO$ . Следовательно, четырехугольник  $AM'OL$  вписанный и  $\sphericalangle M'OA = \sphericalangle M'LA = \sphericalangle B/2$ . Поэтому  $\sphericalangle CMO = (\sphericalangle A + \sphericalangle B)/2$ , т. е.  $M'=M$ . Аналогично  $N'=N$ .

2.50. Так как  $\triangle ADM \sim \triangle CBM$  и  $\triangle ACM \sim \triangle DBM$ , то  $AD:CB = DM:BM$  и  $AC:DB = AM:DM$ . Остается перемножить эти равенства.

2.51. Пусть  $D_1$  — точка пересечения прямой  $BD$  с окружностью, отличная от точки  $B$ . Тогда  $\sphericalangle AB = \sphericalangle AD_1$ , поэтому  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AD_1B = \sphericalangle ABD_1$ . Треугольники  $ACB$  и  $ABD$  имеют общий угол  $A$  и, кроме того,  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABD$ , поэтому  $\triangle ACB \sim \triangle ABD$ . Следовательно,  $AB:AC = AD:AB$ .

2.52. Пусть  $O$  — центр окружности. Так как  $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO$ , то  $\triangle AMC = \triangle ADC$ . Аналогично  $\triangle CDB = \triangle CNB$ . Так как  $\triangle ACD \sim \triangle CDB$ , то  $CD^2 = AD \cdot DB = AM \cdot NB$ .

2.53. Точки  $B_1$  и  $H$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ , поэтому  $\sphericalangle (AB, BC) = \sphericalangle (AB, BH) = \sphericalangle (AB_1, B_1H) = \sphericalangle (B_1C_1, B_1H)$ . Аналогично  $\sphericalangle (AC, BC) = \sphericalangle (B_1C_1, C_1H)$ .

2.54. На продолжении отрезка  $BP$  за точку  $P$  возьмем точку  $D$  так, что  $PD = CP$ . Тогда треугольник  $CDP$  правильный и  $CD \parallel QP$ .

Поэтому  $BP:PQ = BD:DC = (BP + CP):CP$ , т. е.  $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{CP} + \frac{1}{BP}$ .

2.55. Отрезок  $QE$  виден из точек  $A$  и  $B$  под углом  $45^\circ$ , поэтому четырехугольник  $ABEQ$  вписанный. А так как  $\sphericalangle ABE = 90^\circ$ , то  $\sphericalangle AQE = 90^\circ$ . Следовательно, треугольник  $AQE$  прямоугольный равнобедренный и  $AE/AQ = \sqrt{2}$ . Аналогично  $AF/AP = \sqrt{2}$ .

2.56. Так как  $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB$ , то  $\triangle CAM \sim \triangle CNA$ , а значит,  $CA:CM = CN:CA$ , т. е.  $CM \cdot CN = CA^2$ , и  $AM:NA = CM:CA$ . Аналогично  $BM:NB = CM:CB$ . Поэтому  $AM \cdot BM / (AN \cdot BN) = CM^2 / CA^2 = CM^2 / (CM \cdot CN) = CM / CN$ .

2.57. Так как  $AK = AB = CD$ ,  $AD = BC = CH$  и  $\sphericalangle KAD = \sphericalangle BCH$ , то  $\triangle ADK = \triangle CHD$  и  $DK = DH$ . Покажем, что точки  $A, K, H, C$  и  $D$  лежат на одной окружности. Опишем вокруг треугольника  $ADC$  окружность. Проведем в этой окружности хорду  $CK_1$  параллельно  $AD$  и хорду  $AH_1$  параллельно  $DC$ . Тогда  $K_1A = DC$

и  $H_1C = AD$ . Значит,  $K_1 = K$  и  $H_1 = H$ , т. е. построенная окружность проходит через точки  $K$  и  $H$  и углы  $KAH$  и  $KDH$  равны, так как они опираются на одну дугу. Кроме того, уже было показано, что  $KDH$  — равнобедренный треугольник.

2.58. а)  $\angle PBA_1 = \angle PAC_1$  и  $\angle PBC_1 = \angle PAB_1$ , поэтому прямоугольные треугольники  $PBA_1$  и  $PAC_1$ ,  $PAB_1$  и  $PBC_1$  подобны, т. е.  $PA_1 : PB = PC_1 : PA$ ,  $PB_1 : PA = PC_1 : PB$ . Перемножая эти равенства, получаем  $PA_1 \cdot PB_1 = PC_1^2$ .

б) Согласно а)  $OA'' = \sqrt{OB' \cdot OC'}$ ,  $OB'' = \sqrt{OA' \cdot OC'}$ ,  $OC'' = \sqrt{OA' \cdot OB'}$ . Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

2.59. Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $E$  на прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . Точки  $K$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $AE$ , поэтому  $\angle(EK, KN) = \angle(EA, AN)$ . Аналогично  $\angle(EL, LM) = \angle(EC, CM) = \angle(EA, AN)$ , а значит,  $\angle(EK, KN) = \angle(EL, LM)$ . Аналогично  $\angle(EN, NK) = \angle(EM, ML)$  и  $\angle(KE, EN) = \angle(LE, EM)$ . Следовательно  $\triangle EKN \sim \triangle ELM$ , а значит,  $EK : EN = EL : EM$ , т. е.  $EN = EK \cdot EM / EL = ac / b$ .

2.60. Пусть  $H$  — точка пересечения высот,  $M$  — середина стороны  $BC$ . Точки  $A_1$ ,  $B_2$  и  $C_2$  лежат на окружности с диаметром  $MH$ , поэтому  $\angle(B_2A_1, A_1C_2) = \angle(B_2M, MC_2) = \angle(AC, AB)$ . Кроме того,  $\angle(A_1B_2, B_2C_2) = \angle(A_1H, HC_2) = \angle(BC, AB)$  и  $\angle(A_1C_2, C_2B_2) = \angle(BC, AC)$ .

2.61. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точки  $M$  на высоты, поэтому они лежат на окружности с диаметром  $MH$ . Следовательно,  $\angle(A_1B_1, B_1C_1) = \angle(AH, HC) = \angle(BC, AB)$ . Записывая аналогичные равенства для других углов, получаем требуемое.

2.62. Пусть прямые  $BM$  и  $DN$  пересекают  $S_2$  в точках  $L$  и  $C_1$  соответственно. Докажем, что прямые  $DC_1$  и  $CN$  симметричны относительно прямой  $AN$ . Так как  $BN \perp NA$ , достаточно проверить, что  $\angle CNB = \angle BND$ . Но дуги  $CB$  и  $BD$  равны. Дуги  $C_1M$  и  $CL$  симметричны относительно прямой  $AN$ , поэтому они равны, а значит,  $\angle MDC_1 = \angle CML$ . Кроме того,  $\angle CNM = \angle MND$ . Следовательно,  $\triangle MCN \sim \triangle DMN$ , т. е.  $CN : MN = MN : DN$ .

2.63. Опустим из точки  $Q$  перпендикуляры  $QK_1$  и  $QN_1$  на  $KL$  и  $NM$ , из точки  $P$  перпендикуляры  $PM_1$  и  $PL_1$  на  $NM$  и  $KL$ . Ясно, что  $\frac{QC}{PC} = \frac{QK_1}{PL_1} = \frac{QN_1}{PM_1}$ , т. е.  $\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK_1 \cdot QN_1}{PL_1 \cdot PM_1}$ . Так как  $\angle KNC = \angle MLC$  и  $\angle NKC = \angle LMC$ , то  $QN_1 : PL_1 = QN : PL$  и  $QK_1 : PM_1 = QK : PM$ . Поэтому

$$\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK \cdot QN}{PL \cdot PM} = \frac{AQ \cdot QB}{PB \cdot AP} = \frac{(AC - QC) \cdot (AC + QC)}{(AC - PC) \cdot (AC + PC)} = \frac{AC^2 - QC^2}{AC^2 - PC^2}$$

Отсюда получаем  $QC = PC$ .

2.64. а) Так как  $\angle CAM = \angle CBM$  и  $\angle CB_1M = \angle CA_1M$ , то  $\angle B_1AM = \angle A_1BM$  и  $\angle AB_1M = \angle BA_1M$ .

б) Пусть  $M_1$  — такая точка окружности  $S$  с диаметром  $CO$ , что  $CM_1 \parallel A_1B_1$ ;  $M_2$  — точка пересечения окружности  $S$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ ;  $A_2$  и  $B_2$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC$  и  $AC$ . Достаточно проверить, что  $M_1 = M_2$ . Согласно задаче а)  $\triangle AB_2M_2 \sim \triangle BA_2M_2$ , поэтому  $B_2M_2 : A_2M_2 = AB_2 : BA_2$ . А так как  $CA_1 = p - b = BA_2$  и  $CB_1 = AB_2$ , то

$$\frac{B_2M_1}{A_2M_1} = \frac{\sin B_2CM_1}{\sin A_2CM_1} = \frac{\sin CA_1B_1}{\sin CB_1A_1} = \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{AB_2}{BA_2}.$$

На дуге  $A_2CB_2$  окружности  $S$  существует единственная точка  $X$ , для которой  $B_2X : A_2X = k$  (см. задачу 7.14), поэтому  $M_1 = M_2$ .

2.65. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника,  $M$  — середина стороны  $AB$ ,  $H$  — основание высоты  $CH$ ,  $D$  — середина той из дуг, задаваемых точками  $A$  и  $B$ , на которой не лежит точка  $C$ .  $OD \parallel CH$ , поэтому  $\angle DCH = \angle MDC$ . Биссектриса делит пополам угол между медианой и высотой тогда и только тогда, когда  $\angle MCD = \angle DCH = \angle MDC = \angle ODC = \angle OCD$ , т. е.  $M = O$  и  $AB$  — диаметр окружности.

2.66. Пусть  $\alpha = \angle A < \angle B$ . Согласно предыдущей задаче  $\angle C = 90^\circ$ . Медиана  $CM$  делит треугольник  $ABC$  на два равнобедренных треугольника.  $\angle ACM = \angle A = \alpha$ ,  $\angle MCB = 3\alpha$ , значит,  $\alpha + 3\alpha = 90^\circ$ , т. е.  $\alpha = 22,5^\circ$ . Поэтому  $\angle A = 22,5^\circ$ ,  $\angle B = 67,5^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ .

2.67. Пусть  $D$  — точка, в которой прямая  $AE$  пересекает описанную окружность. Точка  $D$  является серединой дуги  $BC$ . Поэтому  $MD \parallel AH$ , причем точки  $A$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $MH$ . Следовательно, точка  $E$  лежит на отрезке  $MH$ .

2.68. Ясно, что  $\angle(AQ, QP) = \angle(AN, NP) = \angle(PM, MB) = \angle(QP, QB)$ . Поэтому точка  $Q$  лежит на окружности, из которой отрезок  $AB$  виден под углом  $2\angle(AC, CB)$ , причем прямая  $QP$  делит дугу  $AB$  этой окружности пополам.

2.69. Точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $AD$ ; эта окружность пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$  ( $F$  не совпадает с  $D$ , если  $AB \neq AC$ ). Ясно, что  $\angle(FC, CE) = \angle(BA, AE) = \angle(DA, AQ) = \angle(DF, FQ)$ , т. е.  $EC \parallel FQ$ . Аналогично  $BE \parallel FP$ . Для завершения доказательства остается заметить, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам трапеции, равны.

2.70. Пусть  $\angle AOB = \alpha$  и  $\angle COD = \beta$ . Тогда  $\alpha/2 + \beta/2 = \angle ADP + \angle PAD = 90^\circ$ . А так как  $2S_{AOB} = R^2 \sin \alpha$  и  $2S_{COD} = R^2 \sin \beta$ , где  $R$  — радиус описанной окружности, то  $S_{AOB} = S_{COD}$ . Аналогично  $S_{BOC} = S_{AOD}$ .

2.71. Пусть  $\angle AOB = 2\alpha$  и  $\angle COD = 2\beta$ . Тогда  $\alpha + \beta = \angle ADP + \angle PAD = 90^\circ$ . Поэтому  $(AP^2 + BP^2) + (CP^2 + DP^2) = AB^2 + CD^2 = 4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2$ . Аналогично  $BC^2 + AD^2 = 4R^2$ .

2.72. Пусть  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина  $BD$ .  $AM^2 = AO^2 - OM^2$ ,  $BN^2 = BO^2 - ON^2$ , поэтому  $AC^2 + BD^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2) = 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - 4OP^2$ , так как  $OM^2 + ON^2 = OP^2$ .

2.73. Острые углы  $BLP$  и  $BDC$  имеют соответственно перпендикулярные стороны, поэтому они равны. Следовательно,  $\angle BLP = \angle BDC = \angle BAP$ . Кроме того,  $AK \parallel BL$  и  $AL \perp BK$ . Поэтому  $AKLB$  — ромб.

2.74. Возьмем на описанной окружности точку  $D'$  так, что  $DD' \parallel AC$ . Так как  $DD' \perp BD$ , то  $BD'$  — диаметр, а значит,  $\angle D'AB = \angle D'CB = 90^\circ$ . Поэтому  $S_{ABCD} = S_{ABCD'} = (AD' \cdot AB + BC \times CD')/2 = (AB \cdot CD + BC \cdot AD)/2$ .

2.75. Проведем диаметр  $AE$ .  $\angle BEA = \angle BCP$  и  $\angle ABE = \angle BPC = 90^\circ$ , поэтому  $\angle EAB = \angle CBP$ . Углы, опирающиеся на хорды  $EB$  и  $CD$ , равны, поэтому  $EB = CD$ . Так как  $\angle EBA = 90^\circ$ , расстояние от точки  $O$  до  $AB$  равно  $EB/2$ .

2.76. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки  $P$  на  $BC$ , пересекает  $BC$  в точке  $H$  и  $AD$  в точке  $M$  (рис. 16).  $\angle BDA = \angle BCA = \angle BPH = \angle MPD$ . Из равенства углов  $MDP$  и  $MPD$  следует, что  $MP$  — медиана прямоугольного треугольника  $APD$ . В самом деле,  $\angle APM = 90^\circ - \angle MPD = 90^\circ - \angle MDP = \angle PAM$ , т. е.  $AM = PM = MD$ .

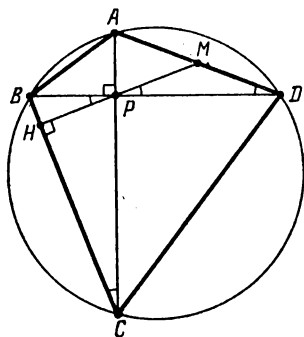


Рис. 16

2.77. Середины сторон четырехугольника  $ABCD$  являются вершинами прямоугольника (см. задачу 1.2), поэтому они лежат на одной окружности. Пусть  $K$  и  $L$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $M$  — точка пересечения прямых  $KP$  и  $CD$ . Согласно задаче 2.76  $PM \perp CD$ , а значит,  $M$  — проекция точки  $P$  на сторону  $CD$

и точка  $M$  лежит на окружности с диаметром  $KL$ . Для остальных проекций доказательство аналогично.

2.78. а) Следует отметить, что так как точки  $A, B, C$  и  $D$  разбивают окружность на дуги, меньшие  $180^\circ$ , то построенный четырехугольник содержит эту окружность. Угол  $\phi$  между касательными, проведенными через точки  $A$  и  $B$ , равен  $180^\circ - \angle AOB$ , а угол  $\psi$  между касательными, проведенными через точки  $C$  и  $D$ , равен  $180^\circ - \angle COD$ . Так как  $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ , то  $\phi + \psi = 180^\circ$ .

Замечание. Обратно, из равенства  $\phi + \psi = 180^\circ$  следует, что  $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ , т. е.  $AC \perp BD$ .

б) Пусть  $O$  — центр вписанной окружности. Так как  $\angle AKO + \angle BMO = 90^\circ$ , то  $\angle AKO = \angle BOM$  и  $\triangle AKO \sim \triangle BOM$ . Следовательно,  $AK \cdot BM = BO \cdot AO = r^2$ .

**2.79.** Предположим сначала, что описанные окружности треугольников  $A'BC$  и  $AB'C$  не касаются и  $P$  — их общая точка, отличная от  $C$ . Тогда  $\angle(PA, PB) = \angle(PA, PC) + \angle(PC, PB) = \angle(B'A, B'C) + \angle(A'C, A'B) = \angle(C'A, C'B)$ , т. е. точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC'$ .

В случае, когда описанные окружности треугольников  $A'BC$  и  $AB'C$  касаются, т. е.  $P = C$ , требуются незначительные изменения: вместо прямой  $PC$  нужно взять общую касательную.

**2.80.** а) Применяя утверждение задачи 2.79 к треугольникам  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ , построенным на сторонах треугольника  $A_1B_1C_1$ , получаем требуемое.

б) Пусть  $P$  — точка пересечения указанных окружностей. Докажем, что величина угла  $\angle(AP, PC)$  постоянна. Так как  $\angle(AP, PC) = \angle(AP, AB) + \angle(AB, BC) + \angle(BC, PC)$ , а угол  $\angle(AB, BC)$  постоянен, то остается проверить, что сумма  $\angle(AP, AB) + \angle(BC, PC)$  постоянна. Ясно, что  $\angle(AP, AB) + \angle(BC, CP) = \angle(AP, AC_1) + \angle(CA_1, CP) = \angle(B_1P, B_1C_1) + \angle(B_1A_1, B_1P) = \angle(B_1A_1, B_1C_1)$ , а величина последнего угла постоянна по условию. Аналогично доказывается, что величины углов  $\angle(AP, PB)$  и  $\angle(BP, PC)$  постоянны. Следовательно, точка  $P$  остается неподвижной.

**2.81.** Как следует из задачи 2.80, б), доказательство достаточно провести лишь для одного такого треугольника  $A_1B_1C_1$ , например для треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника  $ABC$ . Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$ , т. е. центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Так как  $A_1H \perp B_1C_1$  и  $B_1H \perp A_1C_1$ , то  $\angle(A_1H, HB_1) = \angle(B_1C_1, A_1C_1) = \angle(A_1C, CB_1)$ , т. е. точка  $H$  лежит на описанной окружности треугольника  $A_1B_1C$ . Аналогично доказывается, что она лежит на описанных окружностях треугольников  $A_1BC_1$  и  $AB_1C_1$ .

**2.82.** а) Пусть  $X$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $AB'C'$ . Тогда  $\angle(XB', XC) = \angle(XB', XA) + \angle(XA, XC) = \angle(C'B', C'A) + \angle(BA, BC)$ . Так как  $AC' = AP = AB'$ , то треугольник  $C'AB'$  равнобедренный, причем  $\angle C'AB' = 2\angle A$ , поэтому  $\angle(C'B', C'A) = \angle A - 90^\circ$ . Следовательно,  $\angle(XB', XC) = \angle A - 90^\circ + \angle B = 90^\circ - \angle C = \angle(A'B', A'C)$ , т. е. точка  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $A'B'C'$ . Для описанной окружности треугольника  $A'BC'$  доказательство аналогично.

б) Пусть  $X$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $A'B'C'$  и  $A'BC$ . Докажем, что она лежит на описанной окружности треугольника  $ABC'$ . Ясно, что  $\angle(XB, XC') = \angle(XB, XA') + \angle(XA', XC') = \angle(CB, CA') + \angle(B'A', B'C')$ . Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины отрезков  $PA'$ ,  $PB'$  и  $PC'$ . Тогда  $\angle(CB, CA') = \angle(CP, CA_1) = \angle(B_1P, B_1A_1)$ ,  $\angle(B'A', B'C') = \angle(B_1A_1, B_1C_1)$  и  $\angle(AB, AC') = \angle(AP, AC_1) = \angle(B_1P, B_1C_1)$ . Следовательно,  $\angle(XB, XC') = \angle(AB, AC')$ .

Аналогично доказывается, что точка  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $AB'C$ .

в) Так как  $QA'$  — общая хорда окружностей с центрами  $O$  и  $I$ , то  $QA' \perp OI$ . Аналогично  $QB' \perp OJ$  и  $QC \perp IJ$ . Поэтому стороны углов  $OJI$  и  $B'QC$ , а также углов  $OIJ$  и  $A'QC$  взаимно перпендикулярны, а значит,  $\sin OJI = \sin B'QC$  и  $\sin OIJ = \sin A'QC$ . Следовательно,  $OI : OJ = \sin OJI : \sin OIJ = \sin B'QC : \sin A'QC$ . Ясно также, что

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{\sin QJI}{\sin QIJ} = \frac{\sin (QJC/2)}{\sin (QIC/2)} = \frac{\sin QB'C}{\sin QA'C}.$$

Учитывая, что  $\sin B'QC : \sin QB'C = B'C : QC$  и  $\sin A'QC : \sin QA'C = A'C : QC$ , получаем

$$\frac{OI}{OJ} : \frac{OI}{OJ} = \frac{B'C}{QC} : \frac{A'C}{QC} = 1.$$

**2.83. а)** Из условия задачи следует, что никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Пусть прямые  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$

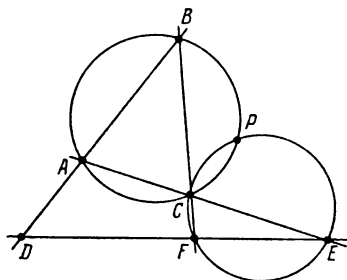


Рис. 17

пересекают четвертую прямую в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно (рис. 17). Обозначим через  $P$  точку пересечения описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $CEF$ , отличную от точки  $C$ . Докажем, что точка  $P$  принадлежит описанной окружности треугольника  $BDF$ . Для этого достаточно проверить, что  $\angle (BP, PF) = \angle (BD, DF)$ . Ясно, что  $\angle (BP, PF) = \angle (BP, PC) + \angle (PC, PF) =$

$= \angle (BA, AC) + \angle (EC, EF) = \angle (BD, AC) + \angle (AC, DF) = \angle (BD, DF)$ . Аналогично доказывается, что точка  $P$  принадлежит описанной окружности треугольника  $ADE$ .

б) Воспользуемся обозначениями рис. 17. Согласно задаче а) описанные окружности треугольников  $ABC$ ,  $ADE$  и  $BDF$  проходят через точку  $P$ , поэтому их можно рассмотреть как описанные окружности треугольников  $ABP$ ,  $ADP$  и  $BDP$ . Следовательно, их центры лежат на окружности, проходящей через точку  $P$  (см. задачу 5.86). Аналогично доказывается, что центры любых трех из данных окружностей лежат на окружности, проходящей через точку  $P$ . Следовательно, все четыре центра лежат на окружности, проходящей через точку  $P$ .

**2.84. а)** Пусть  $P$  — точка Микеля для прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и  $A_1B_1$ . Углы между лучами  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  и касательными к окружностям  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  соответственно равны  $\angle (PB_1, B_1A) = \angle (PC_1, C_1A)$ ,  $\angle (PC_1, C_1B) = \angle (PA_1, A_1B)$ ,  $\angle (PA_1, A_1C) = \angle (PB_1, B_1C)$ . А так

как  $\angle(PC_1, C_1A) = \angle(PC_1, C_1B) = \angle(PA_1, A_1C) = \varphi$ , то при повороте на угол  $\varphi$  с центром  $P$  прямые  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$  переходят в касательные к окружностям  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$ , а значит, при повороте на угол  $90^\circ - \varphi$  эти прямые переходят в прямые  $PO_a$ ,  $PO_b$  и  $PO_c$ . Кроме того,  $PO_a/PA = PO_b/PB = PO_c/PC = 1/2 \sin \varphi$ . Следовательно, при повороте на  $90^\circ - \varphi$  и гомотетии с центром  $P$  и коэффициентом  $1/2 \sin \varphi$  треугольник  $ABC$  переходит в  $O_aO_bO_c$ .

б) Рассмотренное в решении задачи а) преобразование переводит центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  в центр  $O'$  описанной окружности треугольника  $O_aO_bO_c$ , а ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  в ортоцентр  $H'$  треугольника  $O_aO_bO_c$ . Построим треугольник  $OO'H'$  до параллелограмма  $OO'H'M$ . Так как  $OH/OM = OH/O'H' = 2 \sin \varphi$  и  $\angle HOM = \angle(HO, O'H') = 90^\circ - \varphi$ , то  $MH = MO$ , т. е. точка  $M$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $OH$ . Остается заметить, что для вписанного четырехугольника  $OO_aO_bO_c$  точка  $M$  определена однозначно: взяв вместо точки  $O$  любую из точек  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O_c$ , получим ту же самую точку  $M$  (см. задачу 13.33).

**2.85.** Можно считать, что лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $E$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $F$ . Пусть  $P$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $BCE$  и  $CDF$ . Тогда  $\angle CPE = \angle ABC$  и  $\angle CPF = \angle ADC$ . Поэтому  $\angle CPE + \angle CPF = 180^\circ$ , т. е. точка  $P$  лежит на отрезке  $EF$ .

**2.86. а)** Так как  $\angle(AP, PD) = \angle(AP, PE) + \angle(PE, PD) = \angle(AC, CD) + \angle(AB, BD) = \angle(AO, OD)$ , точки  $A$ ,  $P$ ,  $D$  и  $O$  лежат на одной окружности.

б) Ясно, что  $\angle(EP, PO) = \angle(EP, PA) + \angle(PA, PO) = \angle(DC, CA) + \angle(DA, DO) = 90^\circ$ , так как дуги, на которые опираются эти углы, составляют половину окружности.

**2.87.** Воспользуемся обозначениями рис. 17. Проекция точки  $P$  на прямые  $CA$  и  $CB$  совпадают с ее проекциями на  $CE$  и  $CF$ . Следовательно, прямые Симсона точки  $P$  относительно треугольников  $ABC$  и  $CEF$  совпадают (см. задачу 5.85, а).

**2.88.** Пусть точка  $A'$  симметрична точке  $A$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $BC$ . Тогда  $\angle OAH = \angle OAA'/2 = \angle ABA' = |\angle B - \angle C|$ .

**2.89.** Так как  $AA'$  — диаметр, то  $A'C \perp AC$ , поэтому  $BH \parallel A'C$ . Аналогично  $CH \parallel A'B$ . Следовательно,  $BA'CH$  — параллелограмм.

**2.90.** Пусть  $l$  — прямая, параллельная двум исходным прямым;  $D$  — точка пересечения прямых  $m$  и  $n$ . Тогда  $\angle(AD, DB) = \angle(m, AB) + \angle(AB, n) = \angle(AC, l) + \angle(l, CB) = \angle(AC, CB)$ , а значит, точка  $D$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**2.91. а)** Пусть  $O$  — середина дуги окружности  $S$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle CBO = \angle BCO$ , а по свойству угла между касательной и хордой  $\angle BCO = \angle ABO$ . Поэтому  $BO$  — биссектриса угла  $ABC$ , т. е.  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .



Аналогично доказывается, что середина дуги окружности  $S$ , лежащей вне треугольника  $ABC$ , является центром его вневписанной окружности.

б) Требуется доказать, что центр рассматриваемой окружности  $S$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$ . Пусть  $D$  — точка пересечения биссектрисы этого угла с описанной окружностью треугольника  $ABC$ . Тогда  $DB=DO=DC$  (см. задачу 2.4, а), т. е.  $D$  — центр окружности  $S$ .

**2.92.** Если угол  $C$  прямой, то решение задачи очевидно:  $C$  является точкой пересечения прямых  $A_1B$ ,  $A_2B_2$ ,  $AB_1$ . Если же  $\angle C \neq 90^\circ$ , то описанные окружности квадратов  $ACA_1A_2$  и  $BCB_1B_2$  имеют кроме  $C$  еще одну точку — общую точку  $C_1$ . Тогда  $\angle(AC_1, A_2C_1) = \angle(A_2C_1, A_1C_1) = \angle(A_1C_1, C_1C) = \angle(C_1C, C_1B_1) = \angle(C_1B_1, C_1B_2) = \angle(C_1B_2, C_1B) = 45^\circ$  (или же  $-45^\circ$ ; важно лишь то, что все углы имеют один и тот же знак). Поэтому  $\angle(AC_1, C_1B_1) = 4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$ , т. е. прямая  $AB_1$  проходит через точку  $C_1$ . Аналогично  $A_2B_2$  и  $A_1B$  проходят через точку  $C_1$ .

**2.93.** Пусть  $P$  и  $O$  — центры окружностей  $S_1$  и  $S_2$ ;  $\alpha = \angle APC$ ,  $\beta = \angle BPC$ ; прямые  $AC$  и  $BC$  пересекают  $S_2$  в точках  $K$  и  $L$ . Так как  $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ , то  $\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta$ . Далее,  $\angle LOB = 180^\circ - 2\angle LBO = 2\angle CBP = 180^\circ - \beta$ . Аналогично  $\angle KOA = 180^\circ - \alpha$ . Поэтому  $\angle LOK = \angle LOB + \angle KOA - \angle AOB = 180^\circ$ , т. е.  $KL$  — диаметр.

**2.94.** Рассмотрим точки  $M'$ ,  $P'$ ,  $Q'$  и  $R'$ , симметричные точкам  $M$ ,  $P$ ,  $Q$  и  $R$  относительно прямой  $OA$ . Так как точка  $C$  симметрична точке  $B$  относительно  $OA$ , прямая  $P'Q'$  проходит через точку  $C$ . Легко проверяются следующие равенства:  $\angle(CS, NS) = \angle(Q'Q, NQ) = \angle(Q'P', NP') = \angle(CP', NP')$  и  $\angle(CR', P'R') = \angle(MM', P'M') = \angle(MN, P'N) = \angle(CN, P'N)$ . Из этих равенств получаем, что точки  $C$ ,  $N$ ,  $P'$ ,  $S$  и  $R'$  лежат на одной окружности. Но точки  $S$ ,  $R'$  и  $C$  лежат на одной прямой, поэтому  $S = R'$ .

## Глава 3

# ОКРУЖНОСТИ

---

### Основные сведения

1. Прямую, имеющую ровно одну общую точку с окружностью, называют *касательной к окружности*.

Через любую точку  $A$ , лежащую вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности; пусть  $B$  и  $C$  — точки касания,  $O$  — центр окружности. Тогда:

- а)  $AB = AC$ ;
- б)  $\angle BAO = \angle CAO$ ;
- в)  $OB \perp AB$ .

(Иногда касательной мы будем называть не прямую  $AB$ , а отрезок  $AB$ . Например, свойство а) можно сформулировать так: «касательные, проведенные из одной точки, равны».)

2. Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$ , проходящие через точку  $A$ , пересекают окружность в точках  $B_1, C_1$  и  $B_2, C_2$  соответственно. Тогда  $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ . В самом деле,  $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle AB_2C_1$  по трем углам (советуем читателям самостоятельно доказать это, используя свойства вписанных углов и рассматривая два случая:  $A$  лежит вне окружности и  $A$  лежит внутри окружности).

Если прямая  $l_2$  касается окружности, т. е.  $B_2 = C_2$ , то  $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2^2$ . Доказательство производится так же, как и в предыдущем случае, только теперь нужно воспользоваться свойствами угла между касательной и хордой.

3. Прямая, соединяющая центры касающихся окружностей, проходит через их точку касания.

4. *Величиной угла между двумя пересекающимися окружностями* называют величину угла между касательными к ним, проведенными через точку пересечения. При этом безразлично, какую из двух точек пересечения окружностей мы выберем.

Угол между касающимися окружностями равен  $0^\circ$ .

5. При решении задач § 6 используется одно свойство, не имеющее прямого отношения к окружностям: высоты треугольника пересекаются в одной точке. Доказательство этого факта можно найти в решениях задач 5.45 и 7.41, а можно пока принять на веру.

6. Уже в середине V в. до н. э. Гиппократ с острова Хиос (не путайте его со знаменитым врачом Гиппократом с острова Кос, жившим несколько позже) и пифагорейцы начали решать задачу квадратуры круга. Она формулируется следующим образом: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, имеющий ту же площадь, что и данный круг. В 1882 г. немецкий математик Линдемманн доказал, что число  $\pi$  трансцендентно, т. е. не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Из этого, в частности, следует, что задача квадратуры круга неразрешима.

По-видимому, многим давала надежду на возможность квадратуры круга задача 3.38 (задача о «луночках Гиппократа»): площадь фигуры, образованной дугами окружностей, равна площади треугольника. Решив эту задачу, постарайтесь понять, почему в данном случае подобные надежды не имели оснований.

## Вводные задачи

1. Докажите, что из точки  $A$ , лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности, причем длины этих касательных (т. е. расстояния от  $A$  до точек касания) равны.

2. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $AB$ , но не на отрезке  $AB$ . Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки  $X$  к окружностям, равны.

3. Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются внешним образом (т. е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найдите длину общей касательной к этим окружностям.

4. Пусть  $a$  и  $b$  — длины катетов прямоугольного треугольника,  $c$  — длина его гипотенузы. Докажите, что:

а) радиус вписанной окружности этого треугольника равен  $(a+b-c)/2$ ;

б) радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен  $(a+b+c)/2$ .

## § 1. Касательные к окружностям

3.1. Прямые  $PA$  и  $PB$  касаются окружности с центром  $O$  ( $A$  и  $B$  — точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки  $PA$  и  $PB$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что величина угла  $XOY$  не зависит от выбора третьей касательной.

3.2. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а невписанная — в точке  $L$ . Докажите, что  $CK = BL = (a+b-c)/2$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника.

3.3. На основании  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $E$ , и в треугольники  $ACE$  и  $ECB$  вписаны окружности, касающиеся отрезка  $CE$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите длину отрезка  $MN$ , если известны длины отрезков  $AE$  и  $BE$ .

3.4. Четырехугольник  $ABCD$  обладает тем свойством, что существует окружность, вписанная в угол  $BAD$  и касающаяся продолжений сторон  $BC$  и  $CD$ . Докажите, что  $AB + BC = AD + DC$ .

3.5. Общая внутренняя касательная к окружностям с радиусами  $R$  и  $r$  пересекает их общие внешние касательные в точках  $A$  и  $B$  и касается одной из окружностей в точке  $C$ . Докажите, что  $AC \cdot CB = Rr$ .

3.6. К двум окружностям различного радиуса проведены общие внешние касательные  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  описанный тогда и только тогда, когда окружности касаются.

3.7. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Вневыписанная окружность треугольника  $ABD$  касается продолжений сторон  $AD$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что точки пересечения отрезка  $MN$  с  $BC$  и  $CD$  лежат на вписанной окружности треугольника  $BCD$ .

3.8. На каждой стороне четырехугольника  $ABCD$  взято по две точки, и они соединены так, как показано на рис. 18. Докажите, что если все пять заштрихованных четырехугольников описанные, то четырехугольник  $ABCD$  тоже описанный.

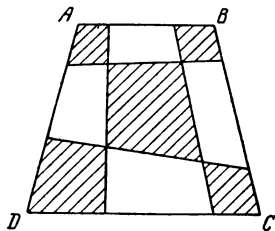


Рис. 18

## § 2. Произведение длин отрезков хорд

3.9. Через точку  $P$ , лежащую на общей хорде  $AB$  двух пересекающихся окружностей, проведены хорда  $KM$  первой окружности и хорда  $LN$  второй окружности. Докажите, что четырехугольник  $KLMN$  вписанный.

3.10. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ ;  $MN$ —общая касательная к ним. Докажите, что прямая  $AB$  делит отрезок  $MN$  пополам.

3.11. Прямая  $OA$  касается окружности в точке  $A$ , а хорда  $BC$  параллельна  $OA$ . Прямые  $OB$  и  $OC$  вторично пересекают окружность в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что прямая  $KL$  делит отрезок  $OA$  пополам.

3.12. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  больше диагонали  $BD$ ;  $M$ —такая точка диагонали  $AC$ , что четырехугольник  $BCDM$  вписанный. Докажите, что прямая  $BD$  является общей касательной к описанным окружностям треугольников  $ABM$  и  $ADM$ .

3.13. Даны окружность  $S$  и точки  $A$  и  $B$  вне ее. Для каждой прямой  $l$ , проходящей через точку  $A$  и пересекающей окружность  $S$  в точках  $M$  и  $N$ , рассмотрим описанную окружность треугольника  $BMN$ . Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки  $B$ .

3.14. Даны окружность  $S$ , точки  $A$  и  $B$  на ней и точка  $C$  хорды  $AB$ . Для каждой окружности  $S'$ , касающейся хорды  $AB$  в точке  $C$  и пересекающей окружность  $S$  в точках  $P$  и  $Q$ , рассмотрим точку  $M$  пересечения прямых  $AB$  и  $PQ$ . Докажите, что положение точки  $M$  не зависит от выбора окружности  $S'$ .

### § 3. Касающиеся окружности

3.15. Две окружности касаются в точке  $A$ . К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках  $C$  и  $D$ . Докажите, что  $\angle CAD = 90^\circ$ .

3.16. Две окружности  $S_1$  и  $S_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются в точке  $A$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая  $S_1$  в точке  $A_1$  и  $S_2$  в точке  $A_2$ . Докажите, что  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ .

3.17. Три окружности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  попарно касаются друг друга в трех различных точках. Докажите, что прямые, соединяющие точку касания окружностей  $S_1$  и  $S_2$  с двумя другими точками касания, пересекают окружность  $S_3$  в точках, являющихся концами ее диаметра.

3.18. Две касающиеся окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внутренним образом окружности радиуса  $R$  с центром  $O$ . Найдите периметр треугольника  $OO_1O_2$ .

3.19. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  касаются окружности  $S$  внутренним образом в точках  $A$  и  $B$ , причем одна из точек пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$  лежит на отрезке  $AB$ . Докажите, что сумма радиусов окружностей  $S_1$  и  $S_2$  равна радиусу окружности  $S$ .

3.20. Радиусы окружностей  $S_1$  и  $S_2$ , касающихся в точке  $A$ , равны  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ). Найдите длину касательной, проведенной к окружности  $S_2$  из точки  $B$  окружности  $S_1$ , если известно, что  $AB = a$ . (Разберите случаи внутреннего и внешнего касания.)

3.21. На отрезке  $AB$  взята точка  $C$ . Прямая, проходящая через точку  $C$ , пересекает окружности с диаметрами  $AC$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$ , а окружность с диаметром  $AB$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $KM = LN$ .

3.22. Даны четыре окружности  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , причем окружности  $S_i$  и  $S_{i+1}$  касаются внешним образом для  $i = 1, 2, 3, 4$  ( $S_5 = S_1$ ). Докажите, что точки касания образуют вписанный четырехугольник.

3.23. а) Три окружности с центрами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , касающиеся друг друга и прямой  $l$ , расположены так, как показано на рис. 19. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — радиусы окружностей с центрами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Докажите, что  $1/\sqrt{c} = 1/\sqrt{a} + 1/\sqrt{b}$ .

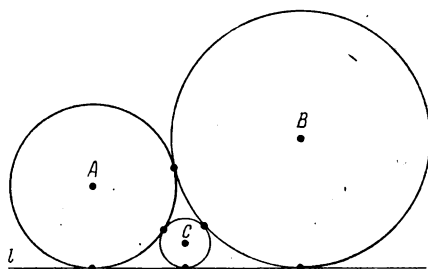


Рис. 19

б) Четыре окружности попарно касаются внешним образом (в шести различных точках). Пусть  $a, b, c, d$  — их радиусы,  $\alpha = 1/a$ ,  $\beta = 1/b$ ,  $\gamma = 1/c$  и  $\delta = 1/d$ . Докажите, что  $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$ .

#### § 4. Три окружности одного радиуса

3.24. Три окружности радиуса  $R$  проходят через точку  $H$ ;  $A, B$  и  $C$  — точки их попарного пересечения, отличные от  $H$ . Докажите, что:

а)  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ;

б) радиус описанной окружности треугольника  $ABC$  тоже равен  $R$ .

3.25. Три равные окружности пересекаются так, как показано на рис. 20, а или б. Докажите, что  $\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle BC_1 \pm \sphericalangle CA_1 = 180^\circ$ , где знак минус берется в случае б.

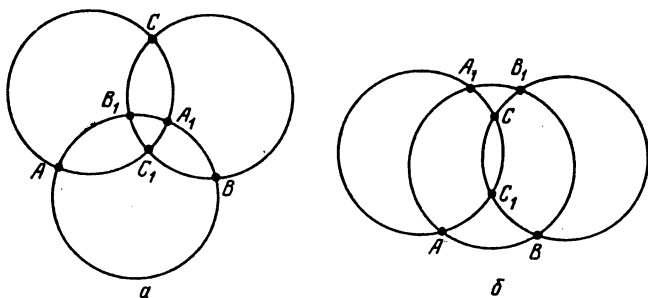


Рис. 20

3.26. Три окружности одного радиуса проходят через точку  $P$ ;  $A, B$  и  $Q$  — точки их попарного пересечения. Четвертая окружность того же радиуса проходит через точку

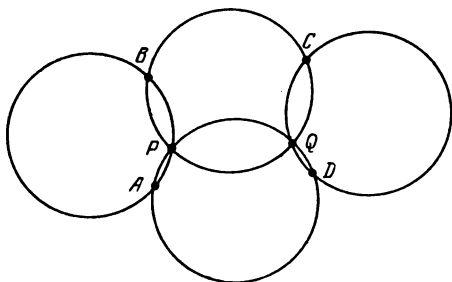


Рис. 21

$Q$  и пересекается с двумя другими в точках  $C$  и  $D$ . При этом треугольники  $ABQ$  и  $CDP$  остроугольные, а четырехугольник  $ABCD$  выпуклый (рис. 21). Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

## § 5. Две касательные, проведенные из одной точки

3.27. Из точки  $A$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  к окружности с центром  $O$ . Докажите, что если из точки  $M$  отрезок  $AO$  виден под углом  $90^\circ$ , то отрезки  $OB$  и  $OC$  видны из нее под равными углами.

3.28. Из точки  $A$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  к окружности с центром  $O$ . Через точку  $X$  отрезка  $BC$  проведена прямая  $KL$ , перпендикулярная  $XO$  (точки  $K$  и  $L$  лежат на прямых  $AB$  и  $AC$ ). Докажите, что  $KX = XL$ .

3.29. На продолжении хорды  $KL$  окружности с центром  $O$  взята точка  $A$ , и из нее проведены касательные  $AP$  и  $AQ$ ;  $M$  — середина отрезка  $PQ$ . Докажите, что  $\angle MKO = \angle MLO$ .

3.30. Из точки  $A$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  к окружности и секущая, пересекающая окружность в точках  $D$  и  $E$ ;  $M$  — середина отрезка  $BC$ . Докажите, что  $BM^2 = DM \cdot ME$  и угол  $DME$  в два раза больше угла  $DBE$  или угла  $DCE$ ; кроме того,  $\angle BEM = \angle DEC$ .

3.31. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность, причем касательные в точках  $B$  и  $D$  пересекаются в точке  $K$ , лежащей на прямой  $AC$ .

а) Докажите, что  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ .

б) Прямая, параллельная  $KB$ , пересекает прямые  $BA$ ,  $BD$  и  $BC$  в точках  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Докажите, что  $PQ = QR$ .

\* \* \*

3.32. Даны окружность  $S$  и прямая  $l$ , не имеющие общих точек. Из точки  $P$ , движущейся по прямой  $l$ , проводятся

касательные  $PA$  и  $PB$  к окружности  $S$ . Докажите, что все хорды  $AB$  имеют общую точку.

Если точка  $P$  лежит вне окружности  $S$ , а  $PA$  и  $PB$  — касательные к окружности, то прямую  $AB$  называют *полярной* точки  $P$  относительно окружности  $S$ .

3.33. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , причем центр  $O$  окружности  $S_1$  лежит на  $S_2$ . Прямая, проходящая через точку  $O$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ , а окружность  $S_2$  в точке  $C$ . Докажите, что точка  $P$  лежит на полярной точки  $C$  относительно окружности  $S_1$ .

## § 6. Применение теоремы о высотах треугольника

3.34. Точки  $C$  и  $D$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ . Прямые  $AC$  и  $BD$ ,  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $AB \perp PQ$ .

3.35. Прямые  $PC$  и  $PD$  касаются окружности с диаметром  $AB$  ( $C$  и  $D$  — точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая  $P$  с точкой пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ , перпендикулярна  $AB$ .

3.36. Даны диаметр  $AB$  окружности и точка  $C$ , не лежащая на прямой  $AB$ . С помощью одной линейки (без циркуля) опустите перпендикуляр из точки  $C$  на  $AB$ , если:

- точка  $C$  не лежит на окружности;
- точка  $C$  лежит на окружности.

3.37. Пусть  $O_a$ ,  $O_b$  и  $O_c$  — центры описанных окружностей треугольников  $PBC$ ,  $PCA$  и  $PAB$ . Докажите, что если точки  $O_a$  и  $O_b$  лежат на прямых  $PA$  и  $PB$ , то точка  $O_c$  лежит на прямой  $PC$ .

## § 7. Площади криволинейных фигур

3.38. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены полуокружности, расположенные так, как показано на рис. 22. Докажите, что сумма площадей образовавшихся «луночек» равна площади данного треугольника.

3.39. В круге проведены два перпендикулярных диаметра, т. е. четыре радиуса, а затем построены четыре круга, диаметрами которых служат эти радиусы. Докажите, что суммарная площадь попарно общих частей этих кругов равна площади

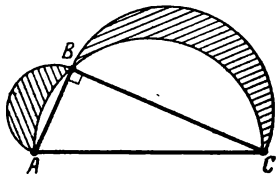


Рис. 22



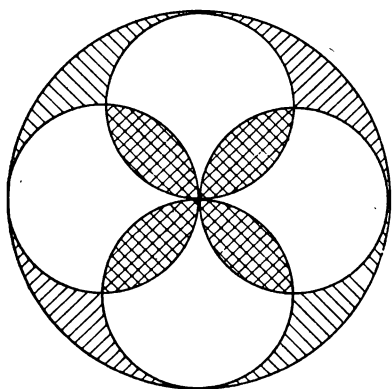


Рис. 23

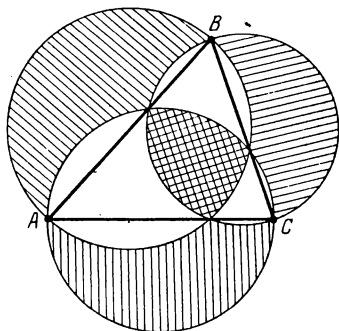


Рис. 24

асти исходного круга, лежащей вне рассматриваемых четырех углов (рис. 23).

**3.40.** На трех отрезках  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  одинаковой длины (точка  $B$  лежит внутри угла  $AOC$ ) как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку  $O$ , равна половине площади (обычного) треугольника  $ABC$ .

**3.41.** На сторонах произвольного остроугольного треугольника  $ABC$  как на диаметрах построены окружности. При этом образуется три «внешних» криволинейных треугольника и один «внутренний» (рис. 24). Докажите, что если из суммы площадей «внешних» треугольников вычесть площадь «внутреннего» треугольника, то получится удвоенная площадь треугольника  $ABC$ .

## § 8. Окружности, вписанные в сегмент

**3.42.** Хорда  $AB$  разбивает окружность  $S$  на две дуги. Окружность  $S_1$  касается хорды  $AB$  в точке  $M$  и одной из дуг в точке  $N$ . Докажите, что:

- прямая  $MN$  проходит через середину  $P$  второй дуги;
- длина касательной  $PQ$  к окружности  $S_1$  равна  $PA$ .

**3.43.** Из точки  $D$  окружности  $S$  опущен перпендикуляр  $DC$  на диаметр  $AB$ . Окружность  $S_1$  касается отрезка  $CA$  в точке  $E$ , а также отрезка  $CD$  и окружности  $S$ . Докажите, что  $DE$  — биссектриса треугольника  $ADC$ .

**3.44.** Две окружности, вписанные в сегмент  $AB$  данной окружности, пересекаются в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что прямая  $MN$  проходит через середину  $C$  дополнительной для данного сегмента дуги  $AB$ .

**3.45.** Окружность, касающаяся сторон  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$ , касается также его описанной окружности (внутренним образом). Докажите, что середина отрезка  $MN$  совпадает с центром вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**3.46.** Треугольники  $ABC_1$  и  $ABC_2$  вписаны в окружность  $S$ , причем хорды  $AC_2$  и  $BC_1$  пересекаются. Окружность  $S_1$  касается хорды  $AC_2$  в точке  $M_2$ , хорды  $BC_1$  в точке  $N_1$  и окружности  $S$ . Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников  $ABC_1$  и  $ABC_2$  лежат на отрезке  $M_2N_1$ .

## § 9. Разные задачи

**3.47.** Две окружности имеют радиусы  $R_1$  и  $R_2$ , а расстояние между их центрами равно  $d$ . Докажите, что эти окружности ортогональны тогда и только тогда, когда  $d^2 = R_1^2 + R_2^2$ .

**3.48.** Три окружности попарно касаются внешним образом в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $ABC$  перпендикулярна всем трем окружностям.

**3.49.** Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке  $M_1$ , а вторую в точке  $M_2$ . Докажите, что  $\angle BO_1M_1 = \angle BO_2M_2$ .

## § 10. Радикальная ось

**3.50.** На плоскости даны окружность  $S$  и точка  $P$ . Прямая, проведенная через точку  $P$ , пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что произведение  $PA \cdot PB$  не зависит от выбора прямой.

Эта величина, взятая со знаком плюс для точки  $P$  вне окружности и со знаком минус для точки  $P$  внутри окружности, называется *степенью точки  $P$  относительно окружности  $S$* .

**3.51.** Докажите, что для точки  $P$ , лежащей вне окружности  $S$ , ее степень относительно  $S$  равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

**3.52.** Докажите, что степень точки  $P$  относительно окружности  $S$  равна  $d^2 - R^2$ , где  $R$  — радиус  $S$ ,  $d$  — расстояние от точки  $P$  до центра  $S$ .

**3.53.** На плоскости даны две неконцентрические окружности  $S_1$  и  $S_2$ . Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно  $S_1$  равна степени относительно  $S_2$ , является прямая.

Эту прямую называют *радикальной осью* окружностей  $S_1$  и  $S_2$ .

**3.54.** Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

**3.55.** На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Эту точку называют *радикальным центром* трех окружностей.

**3.56.** На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

**3.57.** Даны две неконцентрические окружности  $S_1$  и  $S_2$ . Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом, является их радикальная ось, из которой (если данные окружности пересекаются) выброшена их общая хорда.

**3.58.** а) Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

**3.59.** На сторонах  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$  и  $B_1$ ;  $l$  — прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что:

а) прямая  $l$  проходит через точку  $H$  пересечения высот треугольника  $ABC$ ;

б) прямая  $l$  тогда и только тогда проходит через точку  $C$ , когда  $AB_1 : AC = BA_1 : BC$ .

**3.60.** Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $F$ , а продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  — в точке  $E$ . Докажите, что окружности с диаметрами  $AC$ ,  $BD$  и  $EF$  имеют общую радикальную ось, причем на ней лежат ортоцентры треугольников  $ABE$ ,  $CDE$ ,  $ADF$  и  $BCF$ .

**3.61.** Три окружности попарно пересекаются в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Докажите, что  $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$ .

**3.62.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $A'$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $A'B$  пересекает сторону

$AB$  в точке  $M$ , а серединный перпендикуляр к отрезку  $A'C$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $N$ . Докажите, что точка, симметричная точке  $A'$  относительно прямой  $MN$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

3.63. Решите задачу 1.66, используя свойства радикальной оси.

3.64. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

3.65. а) В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CA$  и  $C_1A_1$  пересекаются в точках  $C'$ ,  $A'$  и  $B'$ . Докажите, что точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат на радикальной оси окружности девяти точек (см. задачу 5.106) и описанной окружности.

б) Биссектрисы внешних углов треугольника  $ABC$  пересекают продолжения противоположных сторон в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Докажите, что точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ .

3.66. Докажите, что диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  описанного шестиугольника  $ABCDEF$  пересекаются в одной точке (теорема Бриансона).

3.67. Даны четыре окружности  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , причем окружности  $S_i$  и  $S_{i+1}$  касаются внешним образом для  $i=1, 2, 3, 4$  ( $S_5=S_1$ ). Докажите, что радикальная ось окружностей  $S_1$  и  $S_3$  проходит через точку пересечения общих внешних касательных к  $S_2$  и  $S_4$ .

3.68. а) Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Степень точки  $P$  окружности  $S_1$  относительно окружности  $S_2$  равна  $p$ , расстояние от точки  $P$  до прямой  $AB$  равно  $h$ , а расстояние между центрами окружностей равно  $d$ . Докажите, что  $|p| = 2dh$ .

б) Степени точек  $A$  и  $B$  относительно описанных окружностей треугольников  $BCD$  и  $ACD$  равны  $p_a$  и  $p_b$ . Докажите, что  $|p_a| S_{BCD} = |p_b| S_{ACD}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

3.69. Качалка, имеющая форму сектора круга радиуса  $R$ , качается на горизонтальном столе. По какой траектории движется ее вершина?

**3.70.** Из точки  $A$ , лежащей вне окружности радиуса  $R$ , проведены к ней две касательные  $AB$  и  $AC$ , где  $B$  и  $C$  — точки касания. Пусть  $BC = a$ . Докажите, что  $4R^2 = r^2 + r_a^2 + a^2/2$ , где  $r$  и  $r_a$  — радиусы вписанной и невписанной окружностей треугольника  $ABC$ .

**3.71.** Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую в точках  $A$  и  $D$ , а меньшую в точках  $B$  и  $C$ . Найдите отношение радиусов окружностей, если  $AB:BC:CD = 2:4:3$ .

**3.72.** Центры трех окружностей радиуса  $R$ , где  $1 < R < 2$ , образуют правильный треугольник со стороной 2. Чему равно расстояние между точками пересечения этих окружностей, лежащими вне треугольника?

**3.73.** На отрезке  $AB$  взята точка  $C$  и построены полуокружности с диаметрами  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  (по одну сторону от прямой  $AB$ ). Найдите отношение площади криволинейного треугольника, ограниченного этими полуокружностями, к площади треугольника, образованного серединами дуг этих полуокружностей.

**3.74.** Окружность пересекает сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ , сторону  $AC$  в точках  $B_1$  и  $B_2$ , сторону  $AB$  в точках  $C_1$  и  $C_2$ . Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \left( \frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \right)^{-1}$$

**3.75.** Из точки  $A$  к окружности проведены касательные  $AB$  и  $AC$ ;  $PQ$  — диаметр окружности; прямая  $l$  касается окружности в точке  $Q$ . Прямые  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$  пересекают прямую  $l$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $A_1B_1 = A_1C_1$ .

## Решения

**3.1.** Пусть прямая  $XY$  касается данной окружности в точке  $Z$ . Соответственные стороны треугольников  $XOA$  и  $XOZ$  равны, поэтому  $\angle XOA = \angle XOZ$ . Аналогично  $\angle ZOY = \angle BOY$ . Следовательно,  $\angle XOY = \angle XOZ + \angle ZOY = (\angle AOZ + \angle ZOB)/2 = \angle AOB/2$ .

**3.2.** Пусть  $M$  и  $N$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $BC$ . Тогда  $BK + AN = BM + AM = AB$ , поэтому  $CK + CN = a + b - c$ .

Пусть  $P$  и  $Q$  — точки касания невписанной окружности с продолжениями сторон  $AB$  и  $BC$ . Тогда  $AP = AB + BP = AB + BL$  и  $AQ = AC + CQ = AC + CL$ . Поэтому  $AP + AQ = a + b + c$ . Следовательно,  $BL = BP = AP - AB = (a + b - c)/2$ .

3.3. Согласно задаче 3.2  $CM = (AC + CE - AE)/2$  и  $CN = (BC + CE - BE)/2$ . Учитывая, что  $AC = BC$ , получаем  $MN = |CM - CN| = |AE - BE|/2$ .

3.4. Пусть прямые  $AB, BC, CD$  и  $DA$  касаются окружности в точках  $P, Q, R$  и  $S$ . Тогда  $CQ = CR = x$ , поэтому  $BP = BC + CQ = BC + x$  и  $DS = DC + CR = DC + x$ . Следовательно,  $AP = AB + BP = AB + BC + x$  и  $AS = AD + DS = AD + DC + x$ . Учитывая, что  $AP = AS$ , получаем требуемое.

3.5. Пусть прямая  $AB$  касается окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  в точках  $C$  и  $D$ . Так как  $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ , прямоугольные треугольники  $AO_1C$  и  $O_2AD$  подобны. Поэтому  $O_1C : AC = AD : DO_2$ . Кроме того,  $AD = CB$  (см. задачу 3.2). Следовательно,  $AC \cdot CB = Rr$ .

3.6. Пусть прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ . Для определенности будем считать, что точки  $A$  и  $D$  принадлежат первой окружности, а  $B$  и  $C$  — второй, причем  $OB < OA$  (рис. 25). Точка  $M$  пересечения биссектрис углов  $A$  и  $D$  четырехугольника

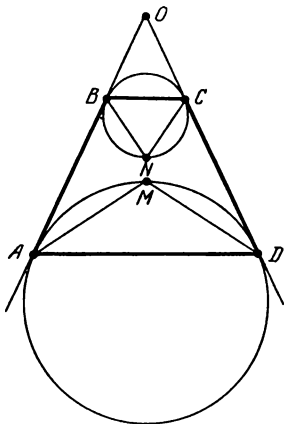


Рис. 25

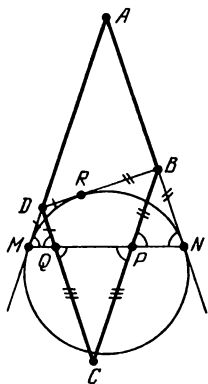


Рис. 26

$ABCD$  является серединой той дуги первой окружности, которая лежит внутри треугольника  $AOD$ , а точка  $N$  пересечения биссектрис углов  $B$  и  $C$  — серединой той дуги второй окружности, которая лежит вне треугольника  $BOC$  (см. задачу 2.91, а). Четырехугольник  $ABCD$  описанный тогда и только тогда, когда точки  $M$  и  $N$  совпадают.

3.7. Пусть  $R$  — точка касания вневписанной окружности со стороной  $BD$ ,  $P$  и  $Q$  — точки пересечения отрезка  $MN$  с  $BC$  и  $CD$  соответственно (рис. 26). Так как  $\angle DMQ = \angle BPN$ ,  $\angle DQM = \angle BNP$  и  $\angle DMQ = \angle BNP$ , то треугольники  $MDQ, PBN$

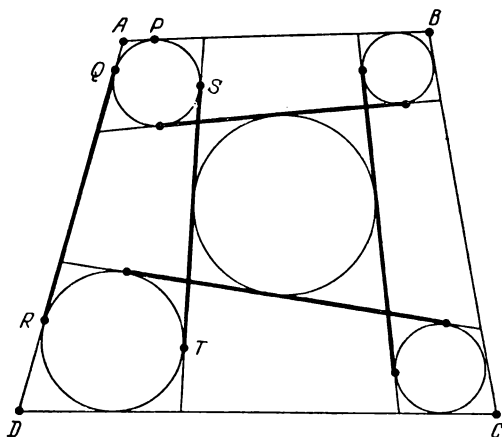


Рис. 27

и  $PCQ$  равнобедренны. Поэтому  $CP = CQ$ ,  $DQ = DM = DR$  и  $BP = BN = BR$ . Следовательно,  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — точки касания вписанной окружности треугольника  $BCD$  с его сторонами (см. задачу 5.1).

3.8. Обозначим некоторые точки касания так, как показано на рис. 27. Сумма длин одной пары противоположных сторон среднего четырехугольника равна сумме длин пары других его сторон. Продолжим стороны этого четырехугольника до точек касания с вписанными окружностями остальных четырехугольников ( $ST$  — один из полученных отрезков). При этом обе суммы длин пар противоположных отрезков увеличатся на одно и то же число. Каждый из полученных отрезков является общей касательной к паре «угловых» окружностей; его можно заменить на равную ему по длине другую общую внешнюю касательную (т. е.  $ST$  заменить на  $QR$ ). Для доказательства равенства  $AB + CD = BC + AD$  остается воспользоваться равенствами вида  $AP = AQ$ .

3.9. Пусть  $P$  — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Четырехугольник  $ABCD$  вписанный тогда и только тогда, когда  $\triangle APB \sim \triangle DPC$ , т. е.  $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ . Так как четырехугольники  $ALBN$  и  $AMBK$  вписанные, то  $PL \cdot PN = PA \cdot PB = PM \cdot PK$ . Поэтому четырехугольник  $KLMN$  вписанный.

3.10. Пусть  $O$  — точка пересечения прямой  $AB$  и отрезка  $MN$ . Тогда  $OM^2 = OA \cdot OB = ON^2$ , т. е.  $OM = ON$ .

3.11. Пусть для определенности лучи  $OA$  и  $BC$  сонаправлены;  $M$  — точка пересечения прямых  $KL$  и  $OA$ . Тогда  $\angle LOM = \angle LCB = \angle OKM$ , а значит,  $\triangle KOM \sim \triangle OLM$ . Следовательно,  $OM : KM = LM : OM$ , т. е.  $OM^2 = KM \cdot LM$ . Кроме того,  $MA^2 = MK \cdot ML$ . Поэтому  $MA = OM$ .

3.12. Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Тогда  $MO \cdot OC = BO \cdot OD$ . Тогда как  $OC = OA$  и  $BO = OD$ , то  $MO \cdot OA = BO^2$  и  $MO \cdot OA = DO^2$ . Эти равенства означают, что  $OB$  касается описанной окружности треугольника  $ABM$  и  $OD$  касается описанной окружности треугольника  $ADM$ .

3.13. Пусть  $C$  — точка пересечения прямой  $AB$  с описанной окружностью треугольника  $BMN$ , отличная от точки  $B$ ;  $AP$  — касательная к окружности  $S$ . Тогда  $AB \cdot AC = AM \cdot AN = AP^2$ , а значит,  $AC = AP^2/AB$ , т. е. точка  $C$  одна и та же для всех прямых  $l$ .

Замечание. Следует исключить случай, когда длина касательной, проведенной из  $A$  к  $S$ , равна  $AB$ .

3.14. Ясно, что  $MC^2 = MP \cdot MQ = MA \cdot MB$ , причем точка  $M$  лежит на луче  $AB$ , если  $AC > BC$ , и на луче  $BA$ , если  $AC < BC$ . Пусть для определенности точка  $M$  лежит на луче  $AB$ . Тогда  $(MB + BC)^2 = (MB + BA) \cdot MB$ . Следовательно,  $MB = BC^2/(AB - 2BC)$ , а значит, положение точки  $M$  не зависит от выбора окружности  $S'$ .

3.15. Пусть  $M$  — точка пересечения прямой  $CD$  и касательной к окружностям в точке  $A$ . Тогда  $MC = MA = MD$ . Поэтому точка  $A$  лежит на окружности с диаметром  $CD$ .

3.16. Точки  $O_1$ ,  $A$  и  $O_2$  лежат на одной прямой, поэтому  $\angle A_2AO_2 = \angle A_1AO_1$ . Треугольники  $AO_2A_2$  и  $AO_1A_1$  равнобедренные, поэтому  $\angle A_2AO_2 = \angle AA_2O_2$  и  $\angle A_1AO_1 = \angle AA_1O_1$ . Следовательно,  $\angle AA_2O_2 = \angle AA_1O_1$ , т. е.  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ .

3.17. Пусть  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  — центры окружностей  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — точки касания окружностей  $S_2$  и  $S_3$ ,  $S_3$  и  $S_1$ ,  $S_1$  и  $S_2$ ;  $A_1$  и  $B_1$  — точки пересечения прямых  $CA$  и  $CB$  с окружностью  $S_3$ . Согласно предыдущей задаче  $B_1O_3 \parallel CO_1$  и  $A_1O_3 \parallel CO_2$ . Точки  $O_1$ ,  $C$  и  $O_2$  лежат на одной прямой, поэтому точки  $A_1$ ,  $O_3$  и  $B_1$  тоже лежат на одной прямой, т. е.  $A_1B_1$  — диаметр окружности  $S_3$ .

3.18. Пусть  $A_1$ ,  $A_2$  и  $B$  — точки касания окружностей с центрами  $O$  и  $O_1$ ,  $O$  и  $O_2$ ,  $O_1$  и  $O_2$ . Тогда  $O_1O_2 = O_1B + BO_2 = O_1A_1 + O_2A_2$ . Поэтому  $OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = (OO_1 + O_1A_1) + (OO_2 + O_2A_2) = OA_1 + OA_2 = 2R$ .

3.19. Пусть  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей  $S$ ,  $S_1$  и  $S_2$ ;  $C$  — общая точка окружностей  $S_1$  и  $S_2$ , лежащая на отрезке  $AB$ . Треугольники  $AOB$ ,  $AO_1C$  и  $CO_2B$  равнобедренные, поэтому  $OO_1CO_2$  — параллелограмм и  $OO_1 = O_2C = O_2B$ , а значит,  $AO = AO_1 + O_1O = AO_1 + O_2B$ .

3.20. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей  $S_1$  и  $S_2$ ;  $X$  — вторая точка пересечения прямой  $AB$  с окружностью  $S_2$ . Квадрат искомой длины касательной равен  $BA \cdot BX$ . Так как  $AB : BX = O_1A : O_1O_2$ , то  $AB \cdot BX = AB^2 \cdot O_1O_2/R = a^2(R \pm r)/R$ , где знак минус берется в случае внутреннего касания.

3.21. Пусть  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей с диаметрами  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ . Достаточно проверить, что  $KO = OL$ . Докажем, что



$\triangle O_1KO = \triangle O_2OL$ . В самом деле,  $O_1K = AC/2 = O_2O$ ,  $O_1O = BC/2 = O_2L$  и  $\angle KO_1O = \angle LO_2L = 180^\circ - 2\alpha$ , где  $\alpha$  — угол между прямыми  $KL$  и  $AB$ .

**3.22.** Пусть  $O_i$  — центр окружности  $S_i$ ,  $A_i$  — точка касания окружностей  $S_i$  и  $S_{i+1}$ . Четырехугольник  $O_1O_2O_3O_4$  выпуклый; пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha_4$  — величины его углов. Легко проверить, что  $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$ , поэтому  $\angle A_1 + \angle A_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)/2 = \angle A_2 + \angle A_4$ .

**3.23.** а) Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — проекции точек  $A, B$  и  $C$  на прямую  $l$ ;  $C_2$  — проекция точки  $C$  на прямую  $AA_1$ . По теореме Пифагора  $CC_2^2 = AC^2 - AC_1^2$ , т. е.  $A_1C_1^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$ . Аналогично  $B_1C_1^2 = 4bc$  и  $A_1B_1^2 = 4ab$ . Так как  $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$ , то  $\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{ab}$ , т. е.  $1/\sqrt{b} + 1/\sqrt{a} = 1/\sqrt{c}$ .

б) Пусть  $A, B, C$  — центры «внешних» окружностей,  $D$  — центр «внутренней» окружности (рис. 28). Полупериметр треугольника  $BDC$  равен  $b+c+d$ , поэтому

$$\cos^2\left(\frac{BDC}{2}\right) = \frac{d(b+c+d)}{(b+d)(c+d)}, \quad \sin^2\left(\frac{BDC}{2}\right) = \frac{bc}{(b+d)(c+d)}$$

(см. задачу 12.13). Если  $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$ , то  $\sin^2\alpha' - \sin^2\beta' - \sin^2\gamma' + 2\sin\beta'\sin\gamma'\cos\alpha' = 0$  (это утверждение эквивалентно теореме косинусов). Подставив в эту формулу значения  $\alpha' = \angle BDC/2$ ,  $\beta' = \angle ADC/2$  и  $\gamma' = \angle ADB/2$ , получим

$$\frac{bc}{(b+d)(c+d)} - \frac{ac}{(a+d)(c+d)} - \frac{ab}{(a+d)(b+d)} + 2\frac{a\sqrt{bcd(b+c+d)}}{(a+d)(b+d)(c+d)} = 0,$$

т. е.

$$\frac{a+d}{a} - \frac{b+d}{b} - \frac{c+d}{c} + 2\sqrt{\frac{d(b+c+d)}{bc}} = 0.$$

Разделив на  $d$ , получим  $\alpha - \beta - \gamma - \delta + 2\sqrt{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta} = 0$ . Поэтому  $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 = (\alpha - \beta - \gamma - \delta)^2 + 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta) = 4(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta) + 4(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta) = 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$ , т. е.  $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$ .

**3.24.** Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — центры данных окружностей (рис. 29). Тогда  $A_1BC_1H$  — ромб, а значит,  $BA_1 \parallel HC_1$ . Аналогично  $B_1A \parallel HC_1$ , поэтому  $B_1A \parallel BA_1$  и  $B_1ABA_1$  — параллелограмм.

а) Так как  $A_1B_1 \perp CH$  и  $A_1B_1 \parallel AB$ , то  $AB \perp CH$ . Аналогично доказывается, что  $BC \perp AH$  и  $CA \perp BH$ .

б) Так же, как было доказано, что  $B_1A \parallel BA_1$ , можно доказать, что  $B_1C \parallel BC_1$  и  $A_1C \parallel AC_1$ ; кроме того, длины всех этих шести отрезков равны  $R$ . Построим треугольник  $BA_1C$  до ромба  $BA_1CO$ . Тогда  $AB_1CO$  тоже ромб. Поэтому  $AO = BO = CO = R$ , т. е.  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , и ее радиус равен  $R$ .

**3.25.** Легко проверить, что  $\sim AB_1 \pm \sim B_1A_1 = \sim AC_1 + \sim C_1A_1$ ,  $\sim BC_1 + \sim C_1B_1 = \sim BA_1 \pm \sim B_1A_1$  и  $\sim C_1A_1 \pm \sim CA_1 = \sim C_1B_1 \pm \sim B_1C$ , где знак минус берется только в случае б. Складывая эти равенства,

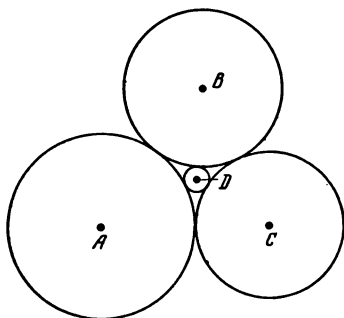


Рис. 28

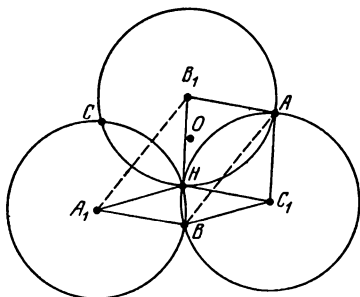


Рис. 29

получаем  $\sphericalangle AB_1 + \sphericalangle BC_1 \pm \sphericalangle CA_1 = \sphericalangle AC_1 + \sphericalangle BA_1 \pm \sphericalangle CB_1$ . С другой стороны, удвоенные величины углов треугольника  $ABC$  равны  $\sphericalangle BA_1 \pm \sphericalangle CA_1$ ,  $\sphericalangle AB_1 \pm \sphericalangle CB_1$  и  $\sphericalangle BC_1 \pm \sphericalangle AC_1$ , а их сумма равна  $360^\circ$ .

3.26. Так как  $\sphericalangle AP + \sphericalangle BP + \sphericalangle PQ = 180^\circ$  (см. задачу 3.25), то  $\sphericalangle AB = 180^\circ - \sphericalangle PQ$ . Аналогично  $\sphericalangle CD = 180^\circ - \sphericalangle PQ$ , т. е.  $\sphericalangle AB = \sphericalangle CD$ , а значит,  $AB = CD$ . Кроме того,  $PQ \perp AB$  и  $PQ \perp CD$  (см. задачу 3.24), поэтому  $AB \parallel CD$ .

3.27. Точки  $M$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $AO$ . Кроме того, хорды  $OB$  и  $OC$  этой окружности равны.

3.28. Точки  $B$  и  $X$  лежат на окружности с диаметром  $KO$ , поэтому  $\sphericalangle XKO = \sphericalangle XBO$ . Аналогично  $\sphericalangle XLO = \sphericalangle XCO$ . Так как  $\sphericalangle XBO = \sphericalangle XCO$ , то треугольник  $KOL$  равнобедренный, причем  $OX$ —его высота.

3.29. Достаточно проверить, что  $AK \cdot AL = AM \cdot AO$ . В самом деле, тогда точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $O$  лежат на одной окружности, и поэтому  $\sphericalangle MKO = \sphericalangle MLO$ . Так как  $\triangle AOP \sim \triangle APM$ , то  $AM \cdot AO = AP^2$ ; ясно также, что  $AK \cdot AL = AP^2$ .

3.30. Пусть  $O$ —центр окружности; точки  $D'$  и  $E'$  симметричны точкам  $D$  и  $E$  относительно прямой  $AO$ . Согласно задаче 28.7 прямые  $ED'$  и  $E'D$  пересекаются в точке  $M$ . Поэтому  $\sphericalangle BDM = \sphericalangle EBM$  и  $\sphericalangle BEM = \sphericalangle DBM$ , а значит,  $\triangle BDM \sim \triangle EBM$ . Следовательно,  $BM : DM = EM : BM$ . Кроме того, если прямая  $ED$  разделяет точки  $B$  и  $M$ , то  $\sphericalangle DME = \sphericalangle DE = 2 \sphericalangle DCE$ .

Из равенства  $\sphericalangle BEM = \sphericalangle DBM$  следует, что  $\sphericalangle BEM = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC$ .

3.31. а) Так как  $\triangle KAB \sim \triangle KBC$ , то  $AB : BC = KB : KC$ . Аналогично  $AD : DC = KD : KC$ . Учитывая, что  $KB = KD$ , получаем требуемое.

б) Задача сводится к предыдущей, так как

$$\frac{PQ}{BQ} = \frac{\sin PBQ}{\sin BPQ} = \frac{\sin ABD}{\sin KBA} = \frac{\sin ABD}{\sin ADB} = \frac{AD}{AB}, \quad \frac{QR}{BQ} = \frac{CD}{CB}.$$

3.32. Опустим из центра  $O$  окружности  $S$  перпендикуляр  $OM$  на прямую  $l$ . Докажем, что точка  $X$ , в которой пересекаются  $AB$  и  $OM$ , остается неподвижной. Точки  $A$ ,  $B$  и  $M$  лежат на окружности с диаметром  $PO$ . Поэтому  $\angle AMO = \angle ABO = \angle BAO$ , а значит,  $\triangle AMO \sim \triangle XAO$ , так как угол при вершине  $O$  у этих треугольников общий. Следовательно,  $AO : MO = XO : AO$ , т. е.  $OX = OA^2 / MO$  — постоянная величина.

3.33. Так как  $\angle OBP = \angle OAB = \angle OCB$ , то  $\triangle OBP \sim \triangle OCB$ , а значит,  $OB^2 = OP \cdot OC$ . Проведем из точки  $C$  касательную  $CD$  к окружности  $S_1$ . Тогда  $OD^2 = OB^2 = OP \cdot OC$ . Следовательно,  $\triangle ODC \sim \triangle OPD$  и  $\angle OPD = \angle ODC = 90^\circ$ .

3.34. Прямые  $BC$  и  $AD$  являются высотами треугольника  $APB$ , поэтому прямая  $PQ$ , проходящая через точку  $Q$  их пересечения, перпендикулярна прямой  $AB$ .

3.35. Обозначим точки пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ ,  $BC$  и  $AD$  через  $K$  и  $K_1$  соответственно. Согласно предыдущей задаче  $KK_1 \perp AB$ , поэтому достаточно доказать, что точка пересечения касательных в точках  $C$  и  $D$  лежит на прямой  $KK_1$ .

Докажем, что касательная в точке  $C$  проходит через середину отрезка  $KK_1$ . Пусть  $M$  — точка пересечения касательной в точке  $C$  и отрезка  $KK_1$ . Стороны острых углов  $ABC$  и  $CKK_1$  соответственно перпендикулярны, поэтому они равны. Аналогично  $\angle CAB = \angle CK_1K$ . Ясно также, что  $\angle KCM = \angle ABC$ , поэтому треугольник  $CMK$  равнобедренный. Аналогично треугольник  $CMK_1$  равнобедренный и  $KM = CM = K_1M$ , т. е.  $M$  — середина отрезка  $KK_1$ .

Аналогично доказывается, что касательная в точке  $D$  проходит через середину отрезка  $KK_1$ .

3.36. а) Прямая  $AC$  пересекает окружность в точках  $A$  и  $A_1$ , прямая  $BC$  — в точках  $B$  и  $B_1$ . Если  $A = A_1$  (или  $B = B_1$ ); то прямая  $AC$  (или  $BC$ ) — искомый перпендикуляр. Если же это не так, то  $AB_1$  и  $BA_1$  являются высотами треугольника  $ABC$  и искомая прямая — это прямая, проходящая через точку  $C$  и точку пересечения прямых  $AB_1$  и  $BA_1$ .

б) Возьмем точку  $C_1$ , не лежащую на окружности, и опустим из нее перпендикуляр на  $AB$ . Пусть он пересекается с окружностью в точках  $D$  и  $E$ . Построим точку  $P$  пересечения прямых  $DC$  и  $AB$ , а затем точку  $F$  пересечения прямой  $PE$  с окружностью. При симметрии относительно  $AB$  точка  $C$  переходит в точку  $F$ . Поэтому  $CF$  — искомый перпендикуляр.

3.37. Так как  $PA \perp O_a O_c$ , то прямая  $PA$  проходит через точку  $O_a$  тогда и только тогда, когда прямая  $PO_a$  проходит через точку пересечения высот треугольника  $O_a O_b O_c$ . Аналогичные утверждения верны и для точек  $B$  и  $C$ . Из условия задачи следует, что  $P$  — точка пересечения высот треугольника  $O_a O_b O_c$ , а значит,  $PO_c \perp O_a O_b$ .

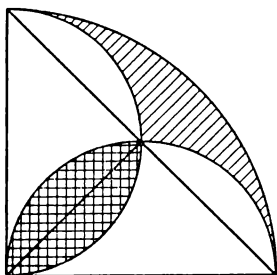


Рис. 30

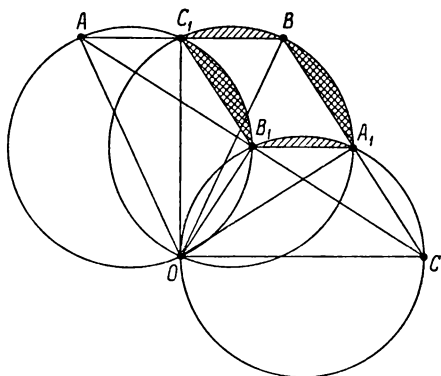


Рис. 31

**3.38.** Пусть  $2a$  и  $2b$  — длины катетов,  $2c$  — длина гипотенузы. Сумма площадей «луночек» равна  $\pi a^2 + \pi b^2 + S_{ABC} - \pi c^2$ . Ясно, что  $\pi(a^2 + b^2 - c^2) = 0$ .

**3.39.** Доказательство достаточно провести для каждой из четырех частей, на которые диаметры делят исходный круг (рис. 30). Рассмотрим в круге сегмент, отсекаемый хордой, на которую опирается центральный угол  $90^\circ$ ; пусть  $S$  и  $s$  — площади таких сегментов для исходного и четырех построенных кругов соответственно. Ясно, что  $S = 4s$ . Остается заметить, что площадь части с одинарной штриховкой равна  $S - 2s = 2s$ , а площадь части с двойной штриховкой равна  $2s$ .

**3.40.** Обозначим точки пересечения окружностей, построенных на отрезках  $OB$  и  $OC$ ,  $OA$  и  $OC$ ,  $OA$  и  $OB$ , через  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно (рис. 31).  $\angle OA_1B = \angle OA_1C = 90^\circ$ , поэтому точки  $B$ ,  $A_1$  и  $C$  лежат на одной прямой, а так как окружности имеют одинаковые радиусы, то  $BA_1 = A_1C$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  являются серединами сторон треугольника  $ABC$ , поэтому  $BA_1 = C_1B_1$  и  $BC_1 = A_1B_1$ . Так как круги имеют одинаковый радиус, то равные хорды  $BA_1$  и  $C_1B_1$  отсекают от кругов части равной площади, а равные хорды  $C_1B$  и  $B_1A_1$  также отсекают от кругов части равной площади. Поэтому площадь криволинейного треугольника  $A_1B_1C_1$  равна площади параллелограмма  $A_1B_1C_1B$ , т. е. равна половине площади треугольника  $ABC$ .

**3.41.** Рассматриваемые окружности проходят через основания высот треугольника, а значит, точки их пересечения лежат на сторонах треугольника. Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $u$  — площади рассматриваемых криволинейных треугольников;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $f$  — площади сегментов, отсекаемых от окружностей сторонами треугольника;  $p$ ,  $q$  и  $r$  — площади частей треугольника, лежащих вне внутреннего криволинейного треугольника (рис. 32). Тогда  $x + (a + b) = u + p + q + (c + f)$ ,

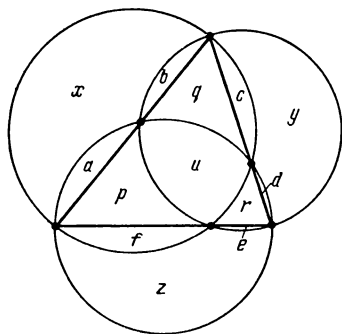


Рис. 32

$y + (c + d) = u + q + r + (e + b)$   
и  $z + (e + f) = u + r + p + (a + d)$ . Складывая эти равенства, получаем  $x + y + z = 2(p + q + r + u) + u$ .

**3.42.** а) Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры окружностей  $S$  и  $S_1$ . Треугольники  $MO_1N$  и  $PON$  равнобедренные, причем  $\angle MO_1N = \angle PON$ . Следовательно, точки  $P, M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

б) Ясно, что  $PQ^2 = PM \cdot PN = PM \cdot (PM + MN)$ . Пусть  $K$  — середина хорды  $AB$ . Тогда  $PM^2 = PK^2 + MK^2$  и  $PM \cdot MN = AM \times$

$\times MB = AK^2 - MK^2$ . Поэтому  $PQ^2 = PK^2 + AK^2 = PA^2$ .

**3.43.** Согласно задаче 3.42, б)  $BE = BD$ . Поэтому  $\angle DAE + \angle ADE = \angle DEB = \angle BDE = \angle BDC + \angle CDE$ . А так как  $\angle DAB = \angle BDC$ , то  $\angle ADE = \angle CDE$ .

**3.44.** Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры вписанных окружностей,  $CP$  и  $CQ$  — касательные к ним. Тогда  $CO_1^2 = CP^2 + PO_1^2 = CP^2 + O_1M^2$  и, так как  $CQ = CA = CP$  (задача 3.42, б),  $CO_2^2 = CQ^2 + QO_2^2 = CP^2 + O_2M^2$ . Следовательно,  $CO_1^2 - CO_2^2 = MO_1^2 - MO_2^2$ , а значит, прямая  $CM$  перпендикулярна  $O_1O_2$  (см. задачу 7.6). Поэтому прямая  $MN$  проходит через точку  $C$ .

**Замечание.** Если окружности не пересекаются, а касаются, утверждение остается верным; в этом случае прямую  $MN$  нужно заменить на касательную к окружностям в их общей точке.

**3.45.** Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — середины дуг  $BC$  и  $AC$ ;  $O$  — центр вписанной окружности. Тогда  $A_1B_1 \perp CO$  (см. задачу 2.19, а) и  $MN \perp CO$ , а значит,  $MN \parallel A_1B_1$ . Будем перемещать точки  $M'$  и  $N'$  по лучам  $CA$  и  $CB$  так, что  $M'N' \parallel A_1B_1$ . Лишь при одном положении точек  $M'$  и  $N'$  точка  $L$ , в которой пересекаются прямые  $B_1M'$  и  $A_1N'$ , попадает на описанную окружность треугольника  $ABC$ . С другой стороны, если отрезок  $MN$  проходит через точку  $O$ , точка  $L$  попадает на эту окружность (см. задачу 2.49).

**3.46.** Решение этой задачи обобщает решение предыдущей задачи. Достаточно доказать, что центр  $O_1$  вписанной окружности треугольника  $ABC_1$  лежит на отрезке  $M_2N_1$ . Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — середины дуг  $BC_1$  и  $BC_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  — середины дуг  $AC_1$  и  $AC_2$ ;  $PQ$  — диаметр окружности  $S$ , перпендикулярный хорде  $AB$ , причем  $Q$  и  $C_1$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . Точка  $O_1$  является точкой пересечения хорд  $AA_1$  и  $BB_1$ , а точка  $L$  касания окружностей  $S$  и  $S_1$  является точкой пересечения прямых  $A_1N_1$  и  $B_2M_2$  (рис. 33). Пусть  $\angle C_1AB = 2\alpha$ ,  $\angle C_1BA = 2\beta$ ,  $\angle C_1AC_2 = 2\varphi$ . Тогда  $\sphericalangle A_1A_2 = 2\varphi = \sphericalangle B_1B_2$ , т. е.  $A_1B_2 \parallel B_1A_2$ . Угол между хордами  $A_1B_2$  и  $BC_1$  равен  $(\sphericalangle B_2C_1 + \sphericalangle A_1B_1)/2 =$

$=\beta-\varphi+\alpha$ , а угол между хордами  $BC_1$  и  $AC_2$  равен  $(\sphericalangle C_1C_2 + \sphericalangle AB)/2 = 2\varphi + 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ . Поэтому хорда  $M_2N_1$  образует с касательными  $BC_1$  и  $AC_2$  равные углы  $\alpha+\beta-\varphi$ , а значит,  $M_2N_1 \parallel A_1B_2$ .

Предположим теперь, что точки  $M'_2$  и  $N'_1$  перемещаются по хордам  $AC_2$  и  $BC_1$  так, что  $M'_2N'_1 \parallel A_1B_2$ . Пусть прямые  $A_1N'_1$  и  $B_2M'_2$  пересекаются в точке  $L'$ . Точка  $L'$  лежит на окружности  $S$  лишь при одном положении точек  $M'_2$  и  $N'_1$ .

Поэтому достаточно указать

на дуге  $AB$  такую точку  $L_1$ , что если  $M''_2, N''_1$  — точки пересечения хорд  $AC_2$  и  $L_1B_2$ ,  $BC_1$  и  $L_1A_1$ , то  $M''_2N''_1 \parallel A_1B_2$  и точка  $O_1$  лежит на отрезке  $M''_2N''_1$ . Пусть  $Q_1$  — такая точка окружности  $S$ , что  $2\angle(PQ, PQ_1) = \angle(PC_2, PC_1)$ , и  $L_1$  — точка пересечения прямой  $Q_1O_1$  с окружностью  $S$ . Докажем, что точка  $L_1$  искомая. Так как  $\sphericalangle B_1Q = 2\alpha$ , то  $\sphericalangle B_2Q_1 = 2(\alpha - 2\varphi) = \sphericalangle C_2A_1$ . Поэтому четырехугольник  $AM''_2O_1L_1$  вписанный, а значит,  $\angle M''_2O_1A = \angle M''_2L_1A = \angle B_2A_1A$ , т. е.  $M''_2O_1 \parallel B_2A_1$ . Аналогично  $N''_1O_1 \parallel B_2A_1$ .

3.47. Пусть окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  проходят через точку  $A$ . Радиусы  $O_1A$  и  $O_2A$  перпендикулярны касательным к окружностям в точке  $A$ , поэтому окружности ортогональны тогда и только тогда, когда  $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ , т. е.  $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$ .

3.48. Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — центры данных окружностей, причем точки  $A, B$  и  $C$  лежат на отрезках  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно. Так как  $A_1B = A_1C, B_1A = B_1C$  и  $C_1A = C_1B$ , то  $A, B$  и  $C$  — точки касания вписанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$  с его сторонами (см. задачу 5.1). Таким образом, радиусы  $A_1B, B_1C$  и  $C_1A$  данных окружностей касаются описанной окружности треугольника  $ABC$ .

3.49. Легко проверить, что угол поворота от вектора  $\overrightarrow{O_iB}$  до вектора  $\overrightarrow{O_iM_i}$  (против часовой стрелки) равен  $2\angle(AB, AM_i)$ . Ясно также, что  $\angle(AB, AM_1) = \angle(AB, AM_2)$ .

3.50. Проведем через точку  $P$  другую прямую, пересекающую окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Тогда  $\triangle PAA_1 \sim \triangle PB_1B$ , поэтому  $PA : PA_1 = PB_1 : PB$ .

3.51. Проведем через точку  $P$  касательную  $PC$ .  $\triangle PAC \sim \triangle PCB$ , поэтому  $PA : PC = PC : PB$ .

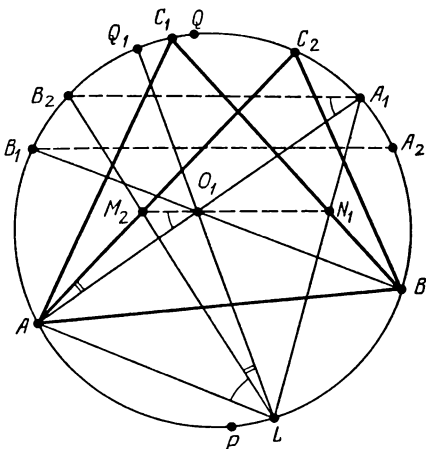


Рис. 33

3.52. Пусть прямая, проходящая через точку  $P$  и центр окружности, пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ . Тогда  $PA = d + R$  и  $PB = |d - R|$ . Поэтому  $PA \cdot PB = |d^2 - R^2|$ . Ясно также, что величина  $d^2 - R^2$  и степень точки  $P$  относительно окружности  $S$  имеют одинаковые знаки.

3.53. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы окружностей. Рассмотрим систему координат, в которой центры окружностей имеют координаты  $(-a, 0)$  и  $(a, 0)$ . Согласно задаче 3.52 степени точки с координатами  $(x, y)$  относительно данных окружностей равны  $(x+a)^2 + y^2 - R_1^2$  и  $(x-a)^2 + y^2 - R_2^2$  соответственно. Приравнявая эти выражения, получаем  $x = (R_1^2 - R_2^2)/4a$ . Это уравнение задает прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей.

3.54. Степени точки пересечения окружностей относительно каждой из них равны нулю, поэтому она лежит на радикальной оси. Если точек пересечения две, то они однозначно задают радикальную ось.

3.55. Так как центры окружностей не лежат на одной прямой, радикальная ось первой и второй окружностей пересекается с радикальной осью второй и третьей окружностей. Степени точки пересечения относительно всех трех окружностей равны, поэтому она лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей.

3.56. Согласно задаче 3.54 прямые, содержащие хорды, являются радикальными осями. Согласно задаче 3.55 радикальные оси пересекаются в одной точке, если центры окружностей не лежат на одной прямой. В противном случае они перпендикулярны этой прямой.

3.57. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы. Окружность  $S$  радиуса  $r$  с центром  $O$  ортогональна окружности  $S_i$  тогда и только тогда, когда  $r^2 = OO_i^2 - r_i^2$ , т. е. квадрат радиуса окружности  $S$  равен степени точки  $O$  относительно окружности  $S_i$ . Поэтому множеством центров искомых окружностей является множество тех точек радикальной оси, степени которых относительно данных окружностей положительны.

3.58. а) Указанные точки лежат на радикальной оси.

б) Точки касания внешних касательных с окружностями являются вершинами трапеции  $ABCD$  с основанием  $AB$ . Середины боковых сторон  $AD$  и  $BC$  принадлежат радикальной оси, поэтому середина  $O$  диагонали  $AC$  тоже принадлежит радикальной оси. Если прямая  $AC$  пересекает окружности в точках  $A_1$  и  $C_1$ , то  $OA_1 \cdot OA = OC_1 \cdot OC$ , а значит,  $OA_1 = OC_1$  и  $AA_1 = CC_1$ .

3.59. а) Пусть  $S_A$  и  $S_B$  — окружности с диаметрами  $AA_1$  и  $BB_1$ ;  $S$  — окружность с диаметром  $AB$ . Общими хордами окружностей  $S$  и  $S_A$ ,  $S$  и  $S_B$  являются высоты  $AH_a$  и  $BH_b$ , поэтому они (или их продолжения) пересекаются в точке  $H$ . Согласно задаче 3.56 общая хорда окружностей  $S_A$  и  $S_B$  проходит через точку пересечения хорд  $AH_a$  и  $BH_b$ .

б) Общая хорда окружностей  $S_A$  и  $S_B$  проходит через точку пересечения прямых  $A_1H_a$  и  $B_1H_b$  (т. е. через точку  $C$ ) тогда и только тогда, когда  $CB_1 \cdot CH_b = CA_1 \cdot CH_a$  (длины отрезков следует считать ориентированными). Так как  $CH_b = (a^2 + b^2 - c^2)/2b$  и  $CH_a = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$ , приходим к соотношению  $CB_1/b = CA_1/a$ .

**3.60.** Проведем в треугольнике  $CDE$  высоты  $CC_1$  и  $DD_1$ ; пусть  $H$  — точка их пересечения. Окружности с диаметрами  $AC$  и  $BD$  проходят через точки  $C_1$  и  $D_1$  соответственно, поэтому степень точки  $H$  относительно каждой из этих окружностей равна ее степени относительно окружности с диаметром  $CD$  (эта окружность проходит через точки  $C_1$  и  $D_1$ ). Аналогично доказывается, что степени точки  $H$  относительно окружностей с диаметрами  $AC$ ,  $BD$  и  $EF$  равны, т. е. радикальные оси этих окружностей проходят через точку  $H$ . Для точек пересечения высот остальных трех треугольников доказательство проводится аналогично.

**Замечание.** Центры рассматриваемых окружностей лежат на прямой Гаусса (см. задачу 4.55), поэтому их общая радикальная ось перпендикулярна прямой Гаусса.

**3.61.** Прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  пересекаются в некоторой точке  $O$  (см. задачу 3.56). Так как  $\triangle A_1OB_2 \sim \triangle B_1OA_2$ , то  $A_1B_2 : A_2B_1 = OA_1 : OB_1$ . Аналогично  $B_1C_2 : B_2C_1 = OB_1 : OC_1$  и  $C_1A_2 : C_2A_1 = OC_1 : OA_1$ . Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

**3.62.** Обозначим через  $B'$  и  $C'$  точки пересечения прямых  $A'M$  и  $A'N$  с прямой, проведенной через точку  $A$  параллельно  $BC$  (рис. 34). Так как треугольники  $A'BM$  и  $A'NC$  равнобедренные, то  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ . Поскольку  $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M$ , степени точки  $M$  относительно окружностей  $S$  и  $S'$ , описанных около треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  соответственно, равны. Это верно и для точки  $N$ , поэтому прямая  $MN$  является радикальной осью окружностей  $S$  и  $S'$ . Окружности  $S$  и  $S'$  имеют одинаковые радиусы, поэтому их радикальная ось является их осью симметрии. Точка  $A'$ , лежащая на окружности  $S'$ , при симметрии относительно прямой  $MN$  переходит в точку, лежащую на окружности  $S$ .

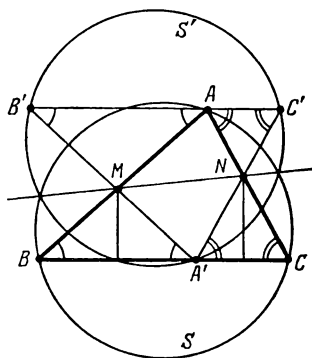


Рис. 34

**3.63.** Пусть  $AC$  и  $BD$  — касательные;  $E$  и  $K$  — точки пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ ,  $AB$  и  $CD$ ;  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей (рис. 35). Так как  $AB \perp O_1E$ ,  $O_1E \perp O_2E$  и  $O_2E \perp CD$ , то  $AB \perp CD$ , а значит,  $K$  — точка пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$  с диаметрами  $AC$  и  $BD$ . Точка  $K$  лежит на радикальной оси окружностей  $S_1$  и  $S_2$ ; остается проверить, что этой радикальной



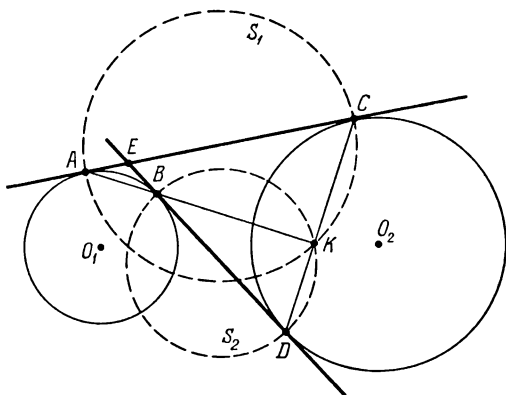


Рис. 35

осью является прямая  $O_1O_2$ . Радиусы  $O_1A$  и  $O_1B$  являются касательными к  $S_1$  и  $S_2$ , поэтому точка  $O_1$  лежит на радикальной оси. Аналогично точка  $O_2$  лежит на радикальной оси.

**3.64.** Обозначим данные окружности через  $S_1, \dots, S_n$ . Для каждой окружности  $S_i$  рассмотрим множество  $M_i$ , состоящее из тех точек  $X$ , для которых степень относительно  $S_i$  не больше степеней относительно  $S_1, \dots, S_n$ . Тогда  $M_i$  — выпуклое множество. В самом деле, пусть  $M_{ij}$  — множество точек  $X$ , для которых степень относительно  $S_i$  не больше степени относительно  $S_j$ .  $M_{ij}$  является полуплоскостью, состоящей из точек, лежащих по одну сторону с окружностью  $S_i$  от радикальной оси окружностей  $S_i$  и  $S_j$ . Множество  $M_i$  является пересечением выпуклых множеств  $M_{ij}$ , поэтому оно само выпуклое. Кроме того, поскольку каждое из множеств  $M_{ij}$  содержит окружность  $S_i$ , то  $M_i$  содержит  $S_i$ . Так как для каждой точки плоскости какая-то из степеней относительно  $S_1, \dots, S_n$  является наименьшей, множества  $M_i$  покрывают всю плоскость. Рассматривая те части множеств  $M_i$ , которые лежат внутри исходного многоугольника, получаем требуемое разбиение.

**3.65.** а) Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на окружности с диаметром  $BC$ , поэтому степени точки  $A'$  относительно описанных окружностей треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  равны степени точки  $A'$  относительно этой окружности. Значит, точка  $A'$  лежит на радикальной оси окружности Эйлера и описанной окружности треугольника  $ABC$ . Для точек  $B'$  и  $C'$  доказательство аналогично.

б) Рассмотрим треугольник  $A_1B_1C_1$ , образованный внешними биссектрисами треугольника  $ABC$  (треугольник  $A_1B_1C_1$  остроугольный). Согласно задаче а) точки  $A', B'$  и  $C'$  лежат на радикальной оси описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Радикальная ось этих окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры, т. е. прямой Эйлера треугольника  $A_1B_1C_1$ . Остается

заметить, что точка пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$  является точкой пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  (см. задачу 1.56,а).

**3.66.** Пусть выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$  касается окружности в точках  $R, Q, T, S, P, U$  (точка  $R$  лежит на  $AB$ ,  $Q$  — на  $BC$  и т. д.).

Выберем произвольное число  $a > 0$  и построим на прямых  $BC$  и  $EF$  точки  $Q'$  и  $P'$  так, что  $QQ' = PP' = a$ , а векторы  $\overrightarrow{QQ'}$  и  $\overrightarrow{PP'}$  сонаправлены с векторами  $\overrightarrow{CB}$  и  $\overrightarrow{EF}$ . Аналогично строим точки  $R', S', T', U'$  (рис. 36;  $RR' = SS' = TT' = UU' = a$ ). Построим окружность  $S_1$ , касающуюся прямых  $BC$  и  $EF$  в точках  $Q'$  и  $P'$ . Аналогично построим окружности  $S_2$  и  $S_3$ .

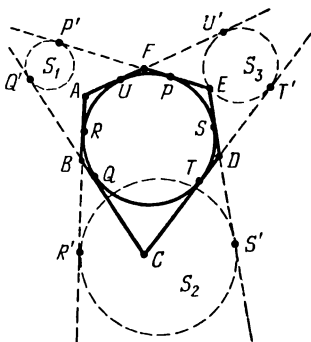


Рис. 36

Докажем, что точки  $B$  и  $E$  лежат на радикальной оси окружностей  $S_1$  и  $S_2$ .  $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$  (если  $QQ' < BQ$ , то  $BQ' = BQ - QQ' = BR - RR' = BR'$ ) и  $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$ . Аналогично доказывается, что прямые  $FC$  и  $AD$  являются радикальными осями окружностей  $S_1$  и  $S_3$ ,  $S_2$  и  $S_3$  соответственно. Так как радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке, прямые  $AD, BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.

**3.67.** Пусть  $A_i$  — точка касания окружностей  $S_i$  и  $S_{i+1}$ ,  $X$  — точка пересечения прямых  $A_1A_4$  и  $A_2A_3$ . Тогда  $X$  — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям  $S_2$  и  $S_4$  (см. задачу 5.60). А так как четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  вписанный (задача 3.22), то  $XA_1 \cdot XA_4 = XA_2 \cdot XA_3$ , а значит, точка  $X$  лежит на радикальной оси окружностей  $S_1$  и  $S_3$ .

**3.68.** а) Рассмотрим систему координат с началом  $O$  в середине отрезка, соединяющего центры окружностей, а ось  $Ox$  направим вдоль этого отрезка. Пусть точка  $P$  имеет координаты  $(x, y)$ ;  $R$  и  $r$  — радиусы окружностей  $S_1$  и  $S_2$ ;  $a = d/2$ . Тогда  $(x+a)^2 + y^2 = R^2$  и  $p = (x-a)^2 + y^2 - r^2 = ((x+a)^2 + y^2 - R^2) - 4ax - r^2 + R^2 = R^2 - r^2 - 4ax$ .

Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(x_0, y_0)$ . Тогда  $(x_0+a)^2 + y_0^2 - R^2 = (x_0-a)^2 + y_0^2 - r^2$ , т. е.  $x_0 = (R^2 - r^2)/4a$ . Поэтому  $2dh = 4a|x_0 - x| = |R^2 - r^2 - 4ax| = |p|$ .

б) Пусть  $d$  — расстояние между центрами описанных окружностей треугольников  $ACD$  и  $BCD$ ;  $h_a$  и  $h_b$  — расстояния от точек  $A$  и  $B$  до прямой  $CD$ . Согласно задаче а)  $|p_a| = 2dh_a$  и  $|p_b| = 2dh_b$ . Учитывая, что  $S_{BCD} = h_b CD/2$  и  $S_{ACD} = h_a CD/2$ , получаем требуемое.

## Глава 4

### ПЛОЩАДЬ

---

#### Основные сведения

1. Площадь  $S$  треугольника  $ABC$  можно вычислять по следующим формулам:

а)  $S = ah_a/2$ , где  $a = BC$ ,  $h_a$  — длина высоты, опущенной на  $BC$ ;

б)  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ , где  $b, c$  — стороны треугольника,  $A$  — угол между ними;

в)  $S = pr$ , где  $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности. В самом деле, если  $O$  — центр вписанной окружности, то

$$S = S_{ABO} + S_{AOC} + S_{OBC} = \frac{1}{2}(c + b + a)r = pr.$$

2. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника.

3. Фигуры, имеющие равную площадь, иногда называют *равновеликими*.

#### Вводные задачи

1. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна  $\frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — длины диагоналей, а  $\varphi$  — угол между ними.

2. Пусть  $E$  и  $F$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ . Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми  $AE$ ,  $ED$ ,  $BF$  и  $FC$ , если известно, что площадь  $ABCD$  равна  $S$ .

3. Многоугольник описан около окружности радиуса  $r$ . Докажите, что его площадь равна  $pr$ , где  $p$  — полупериметр многоугольника.

4. Точка  $X$  расположена внутри параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что  $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$ .

5. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  — середины сторон  $CD$ ,  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$  квадрата  $ABCD$ , площадь которого равна  $S$ . Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ .

## § 1. Медиана делит площадь пополам

4.1. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

4.2. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите все такие точки  $P$ , что площади треугольников  $ABP$ ,  $BSP$  и  $ACP$  равны.

4.3. Внутри данного треугольника  $ABC$  найдите такую точку  $O$ , что площади треугольников  $BOL$ ,  $COM$  и  $AON$  равны (точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , причем  $OL \parallel BC$ ,  $OM \parallel AC$  и  $ON \parallel AB$ ; рис. 37).

4.4. На продолжениях сторон треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $\vec{AB_1} = 2\vec{AB}$ ,  $\vec{BC_1} = 2\vec{BC}$  и  $\vec{CA_1} = 2\vec{AC}$ . Найдите площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ , если известно, что площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

4.5. На продолжениях сторон  $DA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  так, что  $\vec{DA_1} = 2\vec{DA}$ ,  $\vec{AB_1} = 2\vec{AB}$ ,  $\vec{BC_1} = 2\vec{BC}$  и  $\vec{CD_1} = 2\vec{CD}$ . Найдите площадь получившегося четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , если известно, что площадь четырехугольника  $ABCD$  равна  $S$ .

4.6. Шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность. Диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  являются диаметрами этой окружности. Докажите, что площадь шестиугольника  $ABCDEF$  равна удвоенной площади треугольника  $ACE$ .

4.7. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  существует такая точка  $O$ , что площади треугольников  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  и  $ODA$  равны. Докажите, что одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам.

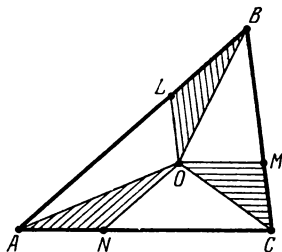


Рис. 37

## § 2. Вычисление площадей

4.8. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что длина одной из ее диагоналей равна 5.

4.9. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника  $ABCDE$ .

4.10. В прямоугольник  $ABCD$  вписаны два различных прямоугольника, имеющих общую вершину  $K$  на стороне  $AB$ . Докажите, что сумма их площадей равна площади прямоугольника  $ABCD$ .

**4.11.** В треугольнике  $ABC$  точка  $E$  — середина стороны  $BC$ , точка  $D$  лежит на стороне  $AC$ ,  $AC=1$ ,  $\angle BAC=60^\circ$ ,  $\angle ABC=100^\circ$ ,  $\angle ACB=20^\circ$  и  $\angle DEC=80^\circ$  (рис. 38). Чему равна сумма площади треугольника  $ABC$  и удвоенной площади треугольника  $CDE$ ?

**4.12.** В треугольник  $T_a = \triangle A_1A_2A_3$  вписан треугольник  $T_b = \triangle B_1B_2B_3$ , а в треугольник  $T_b$  вписан треугольник  $T_c = \triangle C_1C_2C_3$ , причем стороны треугольников  $T_a$  и  $T_c$  параллельны. Выразите площадь треугольника  $T_b$  через площади треугольников  $T_a$  и  $T_c$ .

**4.13.** На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , делящие его стороны в отношениях  $BA_1:A_1C=p$ ,  $CB_1:B_1A=q$  и  $AC_1:C_1B=r$ . Точки пересечения отрезков  $AA_1$ ,

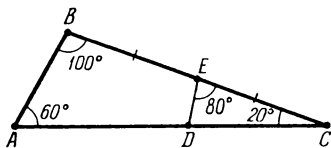


Рис. 38

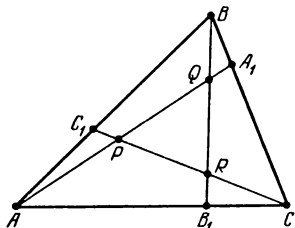


Рис. 39

$BB_1$  и  $CC_1$  расположены так, как показано на рис. 39. Найдите отношение площадей треугольников  $PQR$  и  $ABC$ .

### § 3. Площади треугольников, на которые разбит четырехугольник

**4.14.** Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $S_{AOB} = S_{COD}$  тогда и только тогда, когда  $BC \parallel AD$ .

**4.15.** а) Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Известны площади треугольников  $ABP$ ,  $BSP$ ,  $CDP$ . Найдите площадь треугольника  $ADP$ .

б) Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел представляет собой точный квадрат.

**4.16.** Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , причем  $S_{ABP}^2 + S_{CDP}^2 = S_{BCP}^2 + S_{ADP}^2$ . Докажите, что  $P$  — середина одной из диагоналей.

**4.17.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  существуют три внутренние точки  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , не лежащие на одной

прямой и обладающие тем свойством, что сумма площадей треугольников  $ABP_i$  и  $CDP_i$  равна сумме площадей треугольников  $BCP_i$  и  $ADP_i$  для  $i=1, 2, 3$ . Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

#### § 4. Площади частей, на которые разбит четырехугольник

4.18. Пусть  $K, L, M$  и  $N$  — середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ ; отрезки  $KM$  и  $LN$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что

$$S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}.$$

4.19. Точки  $K, L, M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  параллелограмма  $ABCD$ , причем отрезки  $KM$  и  $LN$  параллельны сторонам параллелограмма. Эти отрезки пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что площади параллелограммов  $KBLO$  и  $MDNO$  равны тогда и только тогда, когда точка  $O$  лежит на диагонали  $AC$ .

4.20. На сторонах  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM:MB = CN:ND$ . Отрезки  $AN$  и  $DM$  пересекаются в точке  $K$ , а отрезки  $BN$  и  $CM$  — в точке  $L$ . Докажите, что  $S_{KMLN} = S_{ADK} + S_{BCL}$ .

4.21. На стороне  $AB$  четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $A_1$  и  $B_1$ , а на стороне  $CD$  — точки  $C_1$  и  $D_1$ , причем  $AA_1 = BB_1 = pAB$  и  $CC_1 = DD_1 = pCD$ , где  $p < 0,5$ . Докажите, что  $S_{A_1B_1C_1D_1}/S_{ABCD} = 1 - 2p$ .

4.22. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены (рис. 40). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырехугольника в 25 раз меньше площади исходного.

4.23. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

4.24. Точки  $K$  и  $M$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , точки  $L$  и  $N$  расположены на сторонах  $BC$  и  $AD$  так, что  $KLMN$  — прямоугольник.

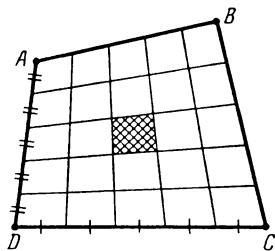


Рис. 40

Докажите, что площадь четырехугольника  $ABCD$  вдвое больше площади прямоугольника  $KLMN$ .

4.25. Квадрат разделен на четыре части двумя перпендикулярными прямыми, точка пересечения которых лежит внутри его. Докажите, что если площади трех из этих частей равны, то равны и площади всех четырех частей.

## § 5. Разные задачи

4.26. Даны параллелограмм  $ABCD$  и некоторая точка  $M$ . Докажите, что  $S_{ACM} = |S_{ABM} \pm S_{ADM}|$ .

4.27. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  внешним образом построены параллелограммы;  $P$  — точка пересечения продолжений их сторон, параллельных  $AB$  и  $BC$ . На стороне  $AC$  построен параллелограмм, вторая сторона которого равна и параллельна  $BP$ . Докажите, что его площадь равна сумме площадей первых двух параллелограммов.

4.28. Точка  $O$ , лежащая внутри правильного шестиугольника, соединена с вершинами. Возникшие при этом шесть треугольников раскрашены попеременно в красный и синий цвет. Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих.

4.29. Продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ;  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $P$  и  $Q$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что:

а)  $S_{PMQN} = |S_{ABD} - S_{ACD}|/2$ ;

б)  $S_{OPQ} = S_{ABCD}/4$ .

4.30. На сторонах  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $E$  и  $F$ . Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $DE$ ,  $BF$ ,  $CE$  и  $AF$ . Докажите, что четырехугольник  $KLMN$  выпуклый и его площадь не зависит от выбора точек  $E$  и  $F$ .

4.31. Середины диагоналей  $AC$ ,  $BD$ ,  $CE$ , ... выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  образуют выпуклый шестиугольник. Докажите, что его площадь в четыре раза меньше площади исходного шестиугольника.

4.32. Диаметр  $PQ$  и перпендикулярная ему хорда  $RS$  пересекаются в точке  $A$ . Точка  $C$  лежит на окружности, а точка  $B$  — внутри окружности, причем  $BC \parallel PQ$  и  $BC = RA$ . Из точек  $A$  и  $B$  опущены перпендикуляры  $AK$  и  $BL$  на прямую  $CQ$ . Докажите, что  $S_{ACK} = S_{BCL}$ .

\* \* \*

4.33. Через точку  $O$ , лежащую внутри треугольника  $ABC$ , проведены отрезки, параллельные сторонам (рис. 41). Отрезки

$AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  разбивают треугольник  $ABC$  на четыре треугольника и три четырехугольника. Докажите, что сумма площадей треугольников, прилежащих к вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$ , равна площади четвертого треугольника.

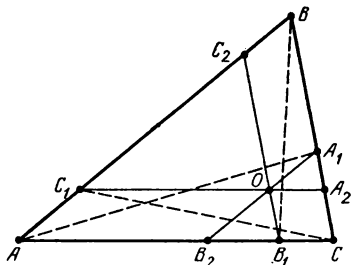


Рис. 41

**4.34.** На биссектрисе угла  $A$  треугольника  $ABC$  взята точка  $A_1$  так, что  $AA_1 = p - a = (b + c - a)/2$ , и через точку  $A_1$  проведена прямая  $l_a$ , перпендикулярная биссектрисе. Если аналогично провести прямые  $l_b$  и  $l_c$ , то треугольник  $ABC$  разобьется на части, среди которых четыре треугольника. Докажите, что площадь одного из этих треугольников равна сумме площадей трех других.

См. также задачи 3.38—3.41, 13.52—13.56, 16.5, 24.5.

## § 6. Прямые и кривые, делящие фигуры на равновеликие части

**4.35.** Отрезок  $MN$ , параллельный стороне  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , делит его площадь пополам (точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $BC$  и  $AD$ ). Длины отрезков, проведенных из точек  $A$  и  $B$  параллельно  $CD$  до пересечения с прямыми  $BC$  и  $AD$ , равны  $a$  и  $b$ . Докажите, что  $MN^2 = (ab + c^2)/2$ , где  $c = CD$ .

**4.36.** Каждая из трех прямых делит площадь фигуры пополам. Докажите, что часть фигуры, заключенная внутри треугольника, образованного этими прямыми, имеет площадь, не превосходящую  $1/4$  площади всей фигуры.

**4.37.** Прямая  $l$  делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что эта прямая делит проекцию данного многоугольника на прямую, перпендикулярную  $l$ , в отношении, не превосходящем  $1 + \sqrt{2}$ .

**4.38.** Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

**4.39.** а) Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр вписанной окружности.

б) Докажите аналогичное утверждение для любого описанного многоугольника.



**4.40.** Точки  $A$  и  $B$  окружности  $S_1$  соединены дугой окружности  $S_2$ , делящей площадь круга, ограниченного  $S_1$ , на равные части. Докажите, что дуга  $S_2$ , соединяющая  $A$  и  $B$ , по длине больше диаметра  $S_1$ .

**4.41.** Кривая  $\Gamma$  делит квадрат на две части равной площади. Докажите, что на ней можно выбрать две точки  $A$  и  $B$  так, что прямая  $AB$  проходит через центр  $O$  квадрата.

См. также задачи 6.51, 6.52, 16.8, 18.29.

## § 7. Формулы для площади четырехугольника

**4.42.** Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Расстояние от точек  $A$ ,  $B$  и  $P$  до прямой  $CD$  равны  $a$ ,  $b$  и  $p$ . Докажите, что площадь четырехугольника  $ABCD$  равна  $ab \cdot CD/2p$ .

**4.43.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса  $R$ ;  $\varphi$  — угол между его диагоналями. Докажите, что площадь  $S$  четырехугольника  $ABCD$  равна  $2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$ .

**4.44.** Докажите, что площадь четырехугольника, диагонали которого не перпендикулярны, равна  $\operatorname{tg} \varphi \cdot |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/4$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — длины последовательных сторон,  $\varphi$  — угол между диагоналями.

**4.45.** а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника  $ABCD$  вычисляется по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2((B+D)/2),$$

где  $p$  — полупериметр,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — длины сторон.

б) Докажите, что если четырехугольник  $ABCD$  вписанный, то  $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ .

в) Докажите, что если четырехугольник  $ABCD$  описанный, то  $S^2 = abcd \sin^2((B+D)/2)$ .

См. также задачу 11.34.

## § 8. Вспомогательная площадь

**4.46.** Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой произвольно внутри правильного треугольника, до его сторон постоянна (и равна высоте треугольника).

**4.47.** Докажите, что длина биссектрисы  $AD$  треугольника  $ABC$  равна  $\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$ .

**4.48.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $O$ ; прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  пересекают его стороны в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что:

$$\text{а) } \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

**4.49.** Даны  $(2n-1)$ -угольник  $A_1 \dots A_{2n-1}$  и точка  $O$ . Прямые  $A_kO$  и  $A_{n+k-1}A_{n+k}$  пересекаются в точке  $B_k$ . Докажите, что произведение отношений  $A_{n+k-1}B_k / A_{n+k}B_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) равно 1.

**4.50.** Дан выпуклый многоугольник  $A_1A_2 \dots A_n$ . На стороне  $A_1A_2$  взяты точки  $B_1$  и  $D_2$ , на стороне  $A_2A_3$  — точки  $B_2$  и  $D_3$  и т. д. таким образом, что если построить параллелограммы  $A_1B_1C_1D_1$ , ...,  $A_nB_nC_nD_n$ , то прямые  $A_1C_1$ , ...,  $A_nC_n$  пересекутся в одной точке  $O$ . Докажите, что  $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \dots \cdot A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \dots \cdot A_nD_n$ .

**4.51.** Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности равен трети одной из высот треугольника.

**4.52.** Расстояния от точки  $X$  стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  до прямых  $AB$  и  $AC$  равны  $d_b$  и  $d_c$ . Докажите, что  $d_b/d_c = BX \cdot AC / (CX \cdot AB)$ .

**4.53.** Многоугольник, описанный около окружности радиуса  $r$ , разрезан на треугольники (произвольным образом). Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше  $r$ .

**4.54.** Через точку  $M$ , лежащую внутри параллелограмма  $ABCD$ , проведены прямые  $PR$  и  $QS$ , параллельные сторонам  $BC$  и  $AB$  (точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно). Докажите, что прямые  $BS$ ,  $PD$  и  $MC$  пересекаются в одной точке.

**4.55.** Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей (прямая Гаусса).

**4.56.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  и на сторонах  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK=BC_1$  и  $AL=CB_1$ . Докажите, что прямая  $AO$ , где  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , делит отрезок  $KL$  пополам.

**4.57.** Медианы  $AA_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что если четырехугольник  $A_1BC_1M$  описанный, то  $AB=BC$ .

**4.58.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $O$ . Обозначим расстояния от точки  $O$  до сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника

через  $d_a, d_b, d_c$ , а расстояния от точки  $O$  до вершин  $A, B, C$  через  $R_a, R_b, R_c$ . Докажите, что:

- $aR_a \geq cd_c + bd_b$ ;
  - $d_a R_a + d_b R_b + d_c R_c \geq 2(d_a d_b + d_b d_c + d_c d_a)$ ;
  - $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$ ;
  - $R_a R_b R_c \geq (R/2r)(d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_c + d_a)$ .
- См. также задачи 5.5, 10.6.

## § 9. Перегруппировка площадей

**4.59.** Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей.

**4.60.** Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади исходного треугольника.

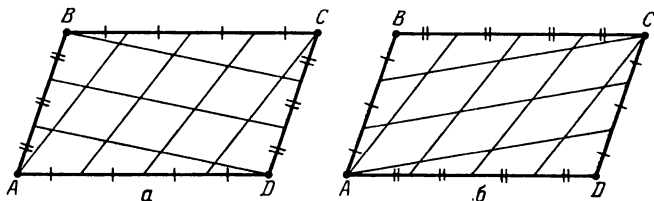


Рис. 42

**4.61.** Стороны  $AB$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  площади 1 разбиты на  $n$  равных частей,  $AD$  и  $BC$  — на  $m$  равных частей.

- Точки деления соединены так, как показано на рис. 42, а.
- Точки деления соединены так, как показано на рис. 42, б.

Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

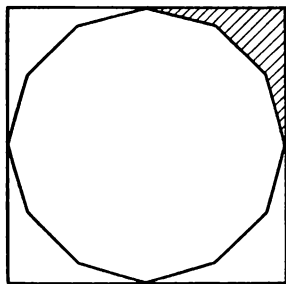


Рис. 43

**4.62.** а) Четыре вершины правильного двенадцатиугольника расположены в серединах сторон квадрата (рис. 43). Докажите, что площадь заштрихованной части в 12 раз меньше площади двенадцатиугольника.

б) Докажите, что площадь двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна 3.

## Задачи для самостоятельного решения

**4.63.** Стороны вписанного четырехугольника  $ABCD$  удовлетворяют соотношению  $AB \cdot BC = AD \cdot DC$ . Докажите, что площади треугольников  $ABC$  и  $ADC$  равны.

**4.64.** Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на такие четыре части, чтобы три треугольника (из числа этих частей) были равновеликими?

**4.65.** Докажите, что все выпуклые четырехугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики.

**4.66.** Докажите, что если два треугольника, получающихся при продолжении сторон выпуклого четырехугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.

**4.67.** Площадь треугольника равна  $S$ , периметр равен  $P$ . Прямые, на которых расположены его стороны, отодвигаются (во внешнюю сторону) на расстояние  $h$ . Найдите площадь и периметр треугольника, образованного тремя полученными прямыми.

**4.68.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $D$  и  $E$  так, что  $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \varphi$ . Найдите отношение  $CD:CE$ , если известны длины сторон  $AC$  и  $BC$  и угол  $\varphi$ .

**4.69.** Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ . Докажите, что

$$S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 2abc/((a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)).$$

**4.70.** Точки  $M$  и  $N$  являются серединами боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$ . Докажите, что если удвоенная площадь трапеции равна  $AN \cdot NB + CM \cdot MD$ , то  $AB = CD = BC + AD$ .

**4.71.** Если четырехугольник с попарно различными длинами сторон вписан в окружность радиуса  $R$ , то существует еще два не равных ему четырехугольника с такими же длинами сторон, вписанных в ту же окружность. Эти четырехугольники имеют не более трех различных длин диагоналей:  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ . Докажите, что площадь четырехугольника равна  $d_1 d_2 d_3 / 4R$ .

**4.72.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ ; точки  $C_2$ ,  $A_2$  и  $B_2$  симметричны этим точкам относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что  $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$ .

**4.73.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $P$ . Прямые, проходящие через точку  $P$  и вершины треугольника,

пересекают стороны в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что площадь треугольника, образованного серединами отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , равна четверти площади треугольника  $A_1B_1C_1$ .

## Решения

**4.1.** Треугольники, прилегающие к одной стороне, имеют равные основания и общую высоту, поэтому они равновелики. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Прямая  $BM$  разрезает каждый из треугольников  $ABC$  и  $AMC$  на два равновеликих треугольника, поэтому  $S_{ABM} = S_{BCM}$ . Аналогично  $S_{BCM} = S_{CAM}$ .

**4.2.** Из равенства площадей треугольников  $ABP$  и  $BCP$  следует, что расстояния от точек  $A$  и  $C$  до прямой  $BP$  равны. Поэтому прямая  $BP$  либо проходит через середину отрезка  $AC$ , либо параллельна ему. Искомые точки изображены на рис. 44.

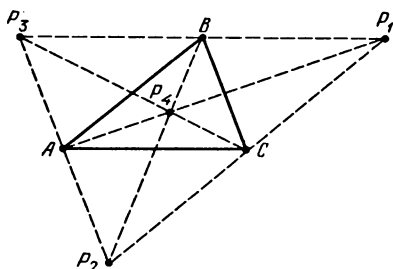


Рис. 44

**4.3.** Обозначим точку пересечения прямой  $LO$  со стороной  $AC$  через  $L_1$ . Так как  $S_{LOB} = S_{MOC}$  и  $\triangle MOC = \triangle L_1OC$ , то  $S_{LOB} = S_{L_1OC}$ . Высоты треугольников  $LOB$  и  $L_1OC$  равны, поэтому  $LO = L_1O$ , т. е. точка  $O$  лежит на медиане, проведенной из вершины  $A$ .

Аналогично доказывается, что

точка  $O$  лежит на медианах, проведенных из вершин  $B$  и  $C$ , т. е.  $O$  — точка пересечения медиан треугольника. Проведенные рассуждения показывают также, что точка пересечения медиан треугольника обладает требуемым свойством.

**4.4.** Так как  $S_{A_1BB_1} = S_{A_1AB} = S_{ABC}$ , то  $S_{AA_1B_1} = 2S$ . Аналогично  $S_{BB_1C_1} = S_{CC_1A_1} = 2S$ . Поэтому  $S_{ABC} = 7S$ .

**4.5.** Поскольку  $AB = BB_1$ , то  $S_{BB_1C} = S_{BAC}$ . А так как  $BC = CC_1$ , то  $S_{B_1C_1C} = S_{BB_1C} = S_{BAC}$  и  $S_{BB_1C_1} = 2S_{BAC}$ . Аналогично  $S_{DD_1A_1} = 2S_{ACD}$ , поэтому  $S_{BB_1C_1} + S_{DD_1A_1} = 2S_{ABC} + 2S_{ACD} = 2S_{ABCD}$ . Аналогично  $S_{AA_1B_1} + S_{CC_1D_1} = 2S_{ABCD}$ , поэтому  $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} + S_{AA_1B_1} + S_{BB_1C_1} + S_{CC_1D_1} + S_{DD_1A_1} = 5S_{ABCD}$ .

**4.6.** Пусть  $O$  — центр описанной окружности. Так как  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  — диаметры, то  $S_{ABO} = S_{DEO} = S_{AEO}$ ,  $S_{BCO} = S_{EFO} = S_{CEO}$ ,  $S_{CDO} = S_{AFO} = S_{ACO}$ . Ясно также, что  $S_{ABCDEF} = 2(S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CDO})$  и  $S_{ACE} = S_{AEO} + S_{CEO} + S_{ACO}$ . Следовательно,  $S_{ABCDEF} = 2S_{ACE}$ .

**4.7.** Пусть  $E$  и  $F$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Так как  $S_{AOB} = S_{AOD}$ , точка  $O$  лежит на прямой  $AF$ . Аналогично точка  $O$  лежит на прямой  $CF$ . Предположим, что точка пересечения

диагоналей не является серединой ни одной из них. Тогда прямые  $AF$  и  $CF$  имеют единственную общую точку  $F$ , поэтому  $O=F$ . Аналогично доказывается, что  $O=E$ . Получено противоречие.

4.8. Пусть диагональ  $AC$  трапеции  $ABCD$  с основанием  $AD$  равна 5. Построим треугольник  $ACB$  до параллелограмма  $ACBE$ . Площадь трапеции  $ABCD$  равна площади прямоугольного треугольника  $DBE$ . Пусть  $BH$  — высота треугольника  $DBE$ . Тогда  $EH^2 = BE^2 - BH^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2$  и  $ED = BE^2/EH = 25/3$ . Поэтому  $S_{DBE} = ED \cdot BH/2 = 50/3$ .

4.9. Так как  $S_{ABE} = S_{ABC}$ , то  $EC \parallel AB$ . Остальные диагонали тоже параллельны соответствующим сторонам. Пусть  $P$  — точка пересечения  $BD$  и  $EC$ . Если  $S_{BPC} = x$ , то  $S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EPB} + S_{EDC} + S_{BPC} = 3 + x$  ( $S_{EPB} = S_{ABE} = 1$ , так как  $ABPE$  — параллелограмм). Так как  $S_{BPC} : S_{DPC} = BP : DP = S_{EPB} : S_{EPD}$ , то  $x : (1 - x) = 1 : x$ , а значит,  $x = (\sqrt{5} - 1)/2$  и  $S_{ABCDE} = (\sqrt{5} + 5)/2$ .

4.10. Центры всех трех прямоугольников совпадают (см. задачу 1.7), поэтому два меньших прямоугольника имеют общую диагональ  $KL$ . Пусть  $M$  и  $N$  — вершины этих прямоугольников, лежащие на стороне  $BC$ . Точки  $M$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $KL$ . Пусть  $O$  — центр этой окружности.  $O_1$  — проекция точки  $O$  на  $BC$ . Тогда  $BO_1 = CO_1$  и  $MO_1 = NO_1$ , а значит,  $BM = NC$ . Чтобы доказать, что  $S_{KLM} + S_{KLN} = S_{KBCL}$ , достаточно проверить, что  $(S_{KBM} + S_{LCM}) + (S_{KBN} + S_{LCN}) = S_{KBCL} = BC(KB + CL)/2 = BC \cdot AB/2$ . Остается заметить, что  $KB \cdot BM + KB \cdot BN = KB \cdot BC$ ,  $LC \cdot CM + LC \cdot CN = LC \cdot BC$  и  $KB \cdot BC + LC \cdot BC = AB \cdot BC$ .

4.11. Опустим из точки  $C$  перпендикуляр  $l$  на прямую  $AB$ . Пусть точки  $A'$ ,  $B'$  и  $E'$  симметричны точкам  $A$ ,  $B$  и  $E$  относительно прямой  $l$ . Тогда треугольник  $AA'C$  равносторонний, причем  $\angle ACB = \angle BCB' = \angle B'CA' = 20^\circ$ . Треугольники  $EE'C$  и  $DEC$  равнобедренные с углом при вершине  $20^\circ$ , причем боковая сторона  $EC$  у них общая. Следовательно,  $S_{ABC} + 2S_{EDC} = S_{ABC} + 2S_{EE'C}$ . Так как  $E$  — середина  $BC$ , то  $2S_{EE'C} = S_{BE'C} = S_{BB'C}/2$ . Поэтому  $S_{ABC} + 2S_{EDC} = S_{AA'C}/2 = \sqrt{3}/8$ .

4.12. Пусть площади треугольников  $T_a$ ,  $T_b$  и  $T_c$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Треугольники  $T_a$  и  $T_c$  гомотетичны, поэтому прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке  $O$ . Коэффициент  $k$  подобия этих треугольников равен  $\sqrt{a/c}$ . Ясно, что  $S_{A_1B_3O} : S_{C_1B_3O} = A_1O : C_1O = k$ . Записывая аналогичные равенства и складывая их, получаем  $a : b = k$ , а значит,  $b = \sqrt{ac}$ .

4.13. Воспользовавшись результатом задачи 1.3, легко проверить, что  $\frac{BQ}{BB_1} = \frac{p+pq}{1+p+pq}$ ,  $\frac{B_1R}{BB_1} = \frac{qr}{1+q+qr}$ ,  $\frac{CR}{CC_1} = \frac{q+qr}{1+q+qr}$ ,  $\frac{CP}{CC_1} = \frac{pr}{1+r+pr}$ . Ясно также, что  $\frac{S_{PQR}}{S_{RB_1C}} = \frac{QR}{RB_1} \cdot \frac{PR}{RC}$  и  $\frac{S_{RB_1C}}{S_{ABC}} = \frac{B_1C}{AC} \cdot \frac{B_1R}{BB_1}$ . Поэтому

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{QR}{BB_1} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{B_1C}{AC} = \frac{QR}{BB_1} \cdot \frac{PR}{CC_1} \cdot \frac{CC_1}{CR} \cdot \frac{B_1C}{AC}. \quad \text{Учитывая, что } \frac{QR}{BB_1} =$$

$$= 1 - \frac{p+pq}{1+p+pq} - \frac{qr}{1+q+rq} = \frac{1}{1+p+pq} - \frac{rq}{1+q+rq} = \frac{(1+q)(1-pqr)}{(1+p+pq)(1+q+qr)}$$

и  $\frac{PR}{CC_1} = \frac{(1+r)(1-pqr)}{(1+q+qr)(1+r+pr)}$ , получаем

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{(1-pqr)^2}{(1+p+pq)(1+q+qr)(1+r+pr)}.$$

4.14. Если  $S_{AOB} = S_{COD}$ , то  $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ . Поэтому  $\triangle AOD \sim \triangle COB$  и  $AD \parallel BC$ . Эти рассуждения обратимы.

4.15. а) Так как  $S_{ADP} : S_{ABP} = DP : BP = S_{CDP} : S_{BCP}$ , то  $S_{ADP} = S_{ABP} \cdot S_{CDP} / S_{BCP}$ .

б) Согласно задаче а)  $S_{ADP} \cdot S_{CBP} = S_{ABP} \cdot S_{CDP}$ . Поэтому

$$S_{ABP} \cdot S_{CBP} \cdot S_{CDP} \cdot S_{ADP} = (S_{ADP} \cdot S_{CBP})^2.$$

4.16. После сокращения на  $\sin^2 \varphi / 4$ , где  $\varphi$  — угол между диагоналями, данное равенство площадей перепишется в виде  $(AP \cdot BP)^2 + (CP \cdot DP)^2 = (BP \cdot CP)^2 + (AP \cdot DP)^2$ , т. е.  $(AP^2 - CP^2)(BP^2 - DP^2) = 0$ .

4.17. Предположим, что четырехугольник  $ABCD$  не параллелограмм; например, прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются. Согласно задаче 7.2 множеством точек  $P$ , лежащих внутри четырехугольника  $ABCD$ , для которых  $S_{ABP} + S_{CDP} = S_{BCP} + S_{ADP} = S_{ABCD}/2$ , является отрезок. Следовательно, точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  лежат на одной прямой. Получено противоречие.

4.18. Ясно, что  $S_{AKON} = S_{AKO} + S_{ANO} = (S_{AOB} + S_{AOD})/2$ . Аналогично  $S_{CLOM} = (S_{BCO} + S_{COD})/2$ . Поэтому  $S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{ABCD}/2$ .

4.19. Если площади параллелограммов  $KBLO$  и  $MDNO$  равны, то  $OK \cdot OL = OM \cdot ON$ . Учитывая, что  $ON = KA$  и  $OM = LC$ , получаем  $KO : KA = LC : LO$ . Следовательно,  $\triangle KOA \sim \triangle LCO$ , а значит, точка  $O$  лежит на диагонали  $AC$ . Эти рассуждения обратимы.

4.20. Пусть  $h_1$ ,  $h$  и  $h_2$  — расстояния от точек  $A$ ,  $M$  и  $B$  до прямой  $CD$ . Согласно задаче 1.1, б)  $h = ph_2 + (1-p)h_1$ , где  $p = AM/AB$ . Поэтому  $S_{DMC} = h \cdot DC/2 = (h_2 p \cdot DC + h_1 (1-p) \cdot DC)/2 = S_{BCN} + S_{ADN}$ . Вычитая из обеих частей этого равенства  $S_{DKN} + S_{CLN}$ , получаем требуемое.

4.21. Согласно задаче 4.20  $S_{ABD_1} + S_{CDB_1} = S_{ABCD}$ . Поэтому  $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{A_1B_1D_1} + S_{C_1D_1B_1} = (1-2p)S_{ABD_1} + (1-2p)S_{CDB_1} = (1-2p)S_{ABCD}$ .

4.22. Согласно задаче 4.21 площадь среднего из четырехугольников, заданных отрезками, соединяющими точки сторон  $AB$  и  $CD$ , в пять раз меньше площади исходного четырехугольника. А так как каждый из рассматриваемых отрезков делится отрезками, соединяющими соответствующие точки другой пары противоположных сторон, на пять равных частей (см. задачу 1.16), то, воспользовавшись еще раз результатом задачи 4.21, получим требуемое.

4.23. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  взяты точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно. Предположим, что диагональ  $KM$  не параллельна стороне  $AD$ . Фиксируем точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$  и будем двигать точку  $L$  по стороне  $BC$ . При этом площадь треугольника  $KLM$  изменяется строго монотонно. Кроме того, если  $LN \parallel AB$ , то выполняется равенство  $S_{AKN} + S_{BKL} + S_{CLM} + S_{DMN} = S_{ABCD}/2$ , т. е.  $S_{KLMN} = S_{ABCD}/2$ .

4.24. Пусть  $L_1$  и  $N_1$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  соответственно. Тогда  $KL_1MN_1$  — параллелограмм и его площадь равна половине площади четырехугольника  $ABCD$  (см. задачу 1.37, а). Поэтому достаточно доказать, что площади параллелограммов  $KLMN$  и  $KL_1MN_1$  равны. Если эти параллелограммы совпадают, то доказывать больше ничего не нужно, а если они не совпадают, то, так как середина отрезка  $KM$  является их центром симметрии,  $LL_1 \parallel NN_1$  и  $BC \parallel AD$ . В этом случае средняя линия  $KM$  трапеции  $ABCD$  параллельна основаниям  $BC$  и  $AD$ , и поэтому высоты треугольников  $KLM$  и  $KL_1M$ , опущенные на сторону  $KM$ , равны, т. е. равны площади параллелограммов  $KLMN$  и  $KL_1MN_1$ .

4.25. Пусть данные прямые  $l_1$  и  $l_2$  делят квадрат на четыре части, площади которых равны  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , причем для первой прямой площади частей, на которые она делит квадрат, равны  $S_1 + S_2$  и  $S_3 + S_4$ , а для второй они равны  $S_2 + S_3$  и  $S_1 + S_4$ . Так как по условию  $S_1 = S_2 = S_3$ , то  $S_1 + S_2 = S_2 + S_3$ . Это означает, что образ прямой  $l_1$  при повороте относительно центра квадрата на  $+90^\circ$  или  $-90^\circ$  не просто параллелен прямой  $l_2$ , а совпадает с ней.

Остается доказать, что прямая  $l_1$  (а значит, и прямая  $l_2$ ) проходит через центр квадрата. Предположим, что это не верно. Рассмотрим образы прямых  $l_1$  и  $l_2$  при поворотах на  $\pm 90^\circ$  и обозначим площади частей, на которые они делят квадрат, так, как показано на рис. 45 (на этом рисунке изображены оба различных варианта расположения прямых). Прямые  $l_1$  и  $l_2$  делят квадрат на

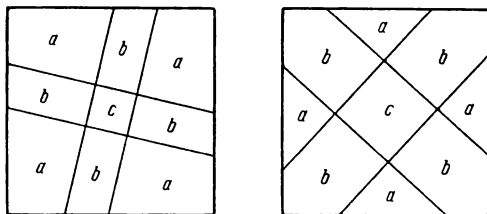


Рис. 45

четыре части, площади которых равны  $a$ ,  $a+b$ ,  $a+2b+c$  и  $a+b$ , причем числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  ненулевые. Ясно, что три из указанных четырех чисел не могут быть равны. Получено противоречие.



4.26. Все три рассматриваемых треугольника имеют общее основание  $AM$ . Пусть  $h_b$ ,  $h_c$  и  $h_d$  — расстояния от точек  $B$ ,  $C$  и  $D$  до прямой  $AM$ . Так как  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ , то  $h_c = |h_b \pm h_d|$ .

4.27. Можно считать, что  $P$  — общая точка параллелограммов, построенных на сторонах  $AB$  и  $BC$ , т. е. эти параллелограммы имеют вид  $ABPQ$  и  $CBPR$ . Ясно, что  $S_{ACRQ} = S_{ABPQ} + S_{CBPR}$ .

4.28. Пусть сторона данного шестиугольника равна  $a$ . Продолжения красных сторон шестиугольника образуют правильный треугольник со стороной  $3a$ , причем сумма площадей красных треугольников равна половине произведения  $a$  на сумму расстояний от точки  $O$  до стороны этого треугольника, поэтому она равна  $a^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}/4$  (см. задачу 4.46). Сумма площадей синих треугольников вычисляется аналогично.

4.29. а) Площадь параллелограмма  $PMQN$  равна  $BC \cdot AD \sin \alpha/4$ , где  $\alpha$  — угол между прямыми  $AD$  и  $BC$ . Высоты треугольников  $ABD$  и  $ACD$ , опущенные из вершин  $B$  и  $C$ , равны  $OB \sin \alpha$  и  $OC \sin \alpha$ , поэтому  $|S_{ABD} - S_{ACD}| = |OB - OC| \cdot AD \sin \alpha/2 = BC \cdot AD \sin \alpha/2$ .

б) Пусть для определенности пересекаются лучи  $AD$  и  $BC$ . Так как  $PN \parallel AO$  и  $QN \parallel CO$ , точка  $N$  лежит внутри треугольника  $OPQ$ . Поэтому  $S_{OPQ} = S_{PQN} + S_{PON} + S_{QON} = \frac{S_{PMQN}}{2} + \frac{S_{ACD}}{4} + \frac{S_{BCD}}{4} = \frac{(S_{ABD} - S_{ACD} + S_{ACD} + S_{BCD})}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4}$ .

4.30. Отрезки  $KM$  и  $LN$  являются средними линиями треугольников  $CED$  и  $AFB$ , поэтому они имеют общую точку — середину отрезка  $EF$ . Кроме того,  $KM = CD/2$ ,  $LN = AB/2$  и угол между прямыми  $KM$  и  $LN$  равен углу  $\alpha$  между прямыми  $AB$  и  $CD$ . Поэтому площадь четырехугольника  $KLMN$  равна  $AB \cdot CD \sin \alpha/8$ .

4.31. Обозначим середины диагоналей шестиугольника  $ABCDEF$  так, как показано на рис. 46. Докажем, что площадь четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  в четыре раза меньше площади четырехугольника  $ABCD$ . Воспользуемся для этого тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними. Так как  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  — средние линии треугольников  $BDF$  и  $ACE$ , получаем требуемое. Аналогично доказывается, что площадь четырехугольника  $D_1E_1F_1A_1$  в четыре раза меньше площади четырехугольника  $DEFA$ .

4.32. Пусть  $\alpha = \angle PQC$ . Тогда  $2S_{ACK} = CK \cdot AK = (AP \cos \alpha) \cdot (AQ \sin \alpha) = AR^2 \sin \alpha \cos \alpha = BC^2 \sin \alpha \cos \alpha = BL \cdot CL = 2S_{BCL}$ .

4.33. Пусть  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$  — площади треугольников, прилегающих к вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$ ;  $S$  — площадь четвертого рассматриваемого треугольника. Ясно, что  $S_{ACC_1} + S_{BAA_1} + S_{CBB_1} = S_{ABC} - S + S_a + S_b + S_c$ . Кроме того,  $S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC} = S_{ACC_1} + S_{BAA_1} + S_{CBB_1}$ .

**4.34.** Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $B_1$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AC$ . Вырежем из треугольника  $ABC$  треугольник  $AOB_1$  и отразим его симметрично относительно биссектрисы угла  $OAB_1$ . При этом прямая  $OB_1$  перейдет в прямую  $l_a$ . Проведем такую операцию для остальных треугольников. Общие части полученных при этом треугольников являются тремя треугольниками рассматриваемого разбиения, а непокрытая часть треугольника  $ABC$  — четвертым треугольником. Ясно также, что площадь непокрытой части равна сумме площадей частей, покрытых дважды.

**4.35.** Пусть для определенности лучи  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда  $S_{CDO} : S_{MNO} = c^2 : x^2$ , где  $x = MN$ , и  $S_{ABO} : S_{MNO} = ab : x^2$ , так как  $OA : ON = a : x$  и  $OB : OM = b : x$ . Следовательно,  $x^2 - c^2 = ab - x^2$ , т. е.  $2x^2 = ab + c^2$ .

**4.36.** Обозначим площади частей фигуры, на которые ее делят прямые, так, как показано на рис. 47. Площадь всей фигуры

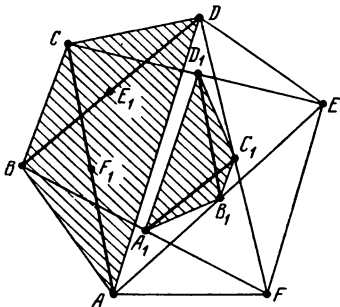


Рис. 46

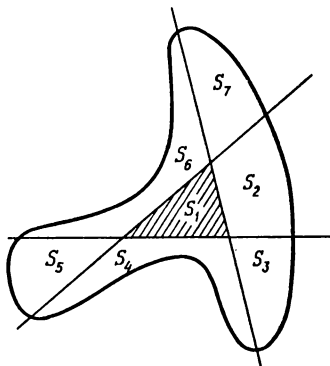


Рис. 47

обозначим через  $S$ . Так как  $S_3 + (S_2 + S_7) = S/2 = S_1 + S_6 + (S_2 + S_7)$ , то  $S_3 = S_1 + S_6$ . Складывая это равенство с равенством  $S/2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ , получаем  $S/2 = 2S_1 + S_2 + S_4 + S_6 \geq 2S_1$ , т. е.  $S_1 \leq S/4$ .

**4.37.** Обозначим проекцию прямой  $l$  через  $B$ , крайние точки проекции многоугольника — через  $A$  и  $C$ . Пусть  $C_1$  — точка многоугольника, проектирующаяся в точку  $C$ ; прямая  $l$  пересекает многоугольник в точках  $K$  и  $L$ , а  $K_1$  и  $L_1$  — точки прямых  $C_1K$  и  $C_1L$ , проектирующиеся в точку  $A$  (рис. 48).

Одна из частей, на которые прямая  $l$  делит многоугольник, содержится в трапеции  $K_1KLL_1$ , другая часть содержит треугольник  $C_1KL$ . Поэтому  $S_{K_1KLL_1} \geq S_{C_1KL}$ , т. е.  $AB \cdot (KL + K_1L_1) \geq BC \cdot KL$ . Так как  $K_1L_1 = KL \cdot (AB + BC) / BC$ , то  $AB \cdot (2 + AB/BC) \geq BC$ . Решая это квадратное неравенство, получаем  $BC/AB \leq 1 + \sqrt{2}$ . Аналогично

$AB/BC \leq 1 + \sqrt{2}$  (нужно провести те же рассуждения, поменяв местами  $A$  и  $C$ ).

**4.38.** Обозначим площадь многоугольника через  $S$ . Пусть  $l$  — произвольная прямая. Введем систему координат, для которой прямая  $l$  является осью  $Ox$ . Пусть  $S(a)$  — площадь той части многоугольника, которая лежит ниже прямой  $y=a$ . При изменении  $a$  от  $-\infty$  до  $+\infty$   $S(a)$  непрерывно меняется от 0 до  $S$ , поэтому  $S(a) = S/2$  для некоторого  $a$ , т. е. прямая  $y=a$  делит площадь многоугольника пополам. Аналогично существует прямая, перпендикулярная  $l$  и делящая площадь многоугольника пополам. Эти две прямые разбивают многоугольник на части, площади которых равны  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  (рис. 49). Так как  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

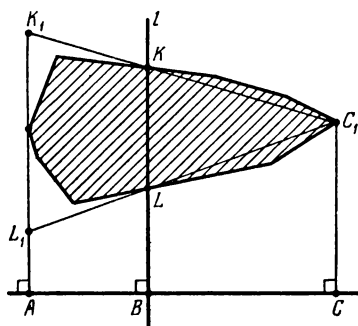


Рис. 48

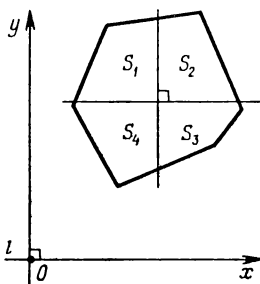


Рис. 49

и  $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ , то  $S_1 = S_3 = A$  и  $S_2 = S_4 = B$ . При повороте прямой  $l$  на  $90^\circ$   $A$  заменится на  $B$ , а  $B$  — на  $A$ . Так как  $A$  и  $B$  изменяются при повороте  $l$  непрерывно, то для некоторого положения прямой  $A = B$ , т. е. площади всех четырех фигур равны.

**4.39.** а) Пусть прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Обозначим центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  через  $O$ , радиус вписанной окружности через  $r$ . Тогда  $S_{ABQP} = r(AP + AB + BQ)/2$  и  $S_{OQCP} = r(QC + CP)/2$ . Так как прямая  $PQ$  делит периметр пополам, то  $AP + AB + BQ = QC + CP$ , поэтому  $S_{ABQP} = S_{OQCP}$ . Кроме того,  $S_{ABQP} = S_{OQCP}$  по условию. Поэтому  $S_{OQP} = 0$ , т. е. прямая  $QP$  проходит через точку  $O$ .

б) Доказательство проводится аналогично.

**4.40.** Рассматривая образ окружности  $S_2$  при симметрии относительно центра окружности  $S_1$  и учитывая равенство площадей, можно доказать, что диаметр  $AA_1$  окружности  $S_1$  пересекает  $S_2$  в некоторой точке  $K$ , отличной от  $A$ , причем  $AK > A_1K$ . Окружность

радиуса  $KA_1$  с центром  $K$  касается окружности  $S_1$  в точке  $A_1$ , поэтому  $BK > A_1K$ , т. е.  $BK + KA > A_1A$ . Ясно также, что сумма длин отрезков  $BK$  и  $KA$  меньше длины дуги  $S_2$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

**4.41.** Случай, когда точка  $O$  принадлежит  $\Gamma$ , очевиден; поэтому будем предполагать, что  $O$  не принадлежит  $\Gamma$ . Пусть  $\Gamma'$  — образ кривой  $\Gamma$  при симметрии относительно точки  $O$ . Если кривые  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  не пересекаются, то части, на которые  $\Gamma$  делит квадрат, не могут быть равной площади. Пусть  $X$  — точка пересечения  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , а точка  $X'$  симметрична  $X$  относительно точки  $O$ . Так как при симметрии относительно точки  $O$  кривая  $\Gamma'$  переходит в  $\Gamma$ , то  $X'$  принадлежит  $\Gamma$ . Поэтому прямая  $XX'$  искомая.

**4.42.** Пусть площади треугольников  $APB$ ,  $BPC$ ,  $CPD$  и  $DPA$  равны  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ . Тогда  $a/p = (S_3 + S_4)/S_3$  и  $b \cdot CD/2 = S_3 + S_2$ , а значит,  $ab \cdot CD/2p = (S_3 + S_4)(S_3 + S_2)/S_3$ . Учитывая, что  $S_2S_4 = S_1S_3$ , получаем требуемое.

**4.43.** Применяя теорему синусов к треугольникам  $ABC$  и  $ABD$ , получаем  $AC = 2R \sin B$  и  $BD = 2R \sin A$ . Поэтому  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$ .

**4.44.** Так как площадь четырехугольника равна  $(d_1 d_2 \sin \varphi)/2$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — длины диагоналей, то остается проверить, что  $2d_1 d_2 \cos \varphi = |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ ,  $\varphi = \angle AOB$ . Тогда  $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos \varphi$  и  $BC^2 = BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cos \varphi$ . Поэтому  $AB^2 - BC^2 = AO^2 - CO^2 - 2BO \cdot AC \cos \varphi$ . Аналогично  $CD^2 - AD^2 = CO^2 - AO^2 - 2DO \cdot AC \cos \varphi$ . Складывая эти равенства, получаем требуемое.

**Замечание.** Так как  $16S^2 = 4d_1^2 d_2^2 \sin^2 \varphi = 4d_1^2 d_2^2 - (2d_1 d_2 \cos \varphi)^2$ , то  $16S^2 = 4d_1^2 d_2^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$ .

**4.45.** а) Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$  и  $AD = d$ . Ясно, что  $S = S_{ABC} + S_{ADC} = (ab \sin B + cd \sin D)/2$  и  $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$ . Поэтому

$$16S^2 = 4a^2 b^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 B + 8abcd \sin B \sin D + 4c^2 d^2 - 4c^2 d^2 \cos^2 D, \\ (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 8abcd \cos B \cos D = 4a^2 b^2 \cdot \cos^2 B + 4c^2 d^2 \cos^2 D.$$

Подставляя второе равенство в первое, получаем

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - \\ - 8abcd(1 + \cos B \cos D - \sin B \sin D).$$

Ясно, что  $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$  и  $1 + \cos B \cos D - \sin B \sin D = 2\cos^2((B + D)/2)$ .

б) Если  $ABCD$  — вписанный четырехугольник, то  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ , а значит,  $\cos^2((B + D)/2) = 0$ .

в) Если  $ABCD$  — описанный четырехугольник, то  $a+c=b+d$ , поэтому  $p=a+c=b+d$  и  $p-a=c$ ,  $p-b=d$ ,  $p-c=a$ ,  $p-d=b$ . Следовательно,  $S^2=abcd(1-\cos^2((B+D)/2))=abcd\sin^2((B+D)/2)$ .

Если четырехугольник  $ABCD$  вписанный и описанный одновременно, то  $S^2=abcd$ .

**4.46.** Из точки  $O$ , лежащей внутри правильного треугольника  $ABC$ , опустим перпендикуляры  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  на стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно. Пусть  $a$  — длина стороны треугольника  $ABC$ ,  $h$  — длина высоты. Ясно, что  $S_{ABC}=S_{BCO}+S_{ACO}+S_{ABO}$ . Следовательно,  $ah=a\cdot OA_1+a\cdot OB_1+a\cdot OC_1$ , т. е.  $h=OA_1+OB_1+OC_1$ .

**4.47.** Пусть  $AD=l$ . Тогда  $2S_{ABD}=cl\sin(\alpha/2)$ ,  $2S_{ACD}=bl\sin(\alpha/2)$  и  $2S_{ABD}=bc\sin\alpha$ . Следовательно,  $cl\sin(\alpha/2)+bl\sin(\alpha/2)=bc\sin\alpha=2bc\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ .

**4.48.** а) Пусть расстояния от точек  $A$  и  $O$  до прямой  $BC$  равны  $h$  и  $h_1$ . Тогда  $S_{OBC}:S_{ABC}=h_1:h=OA_1:AA_1$ . Аналогично  $S_{OAC}:S_{ABC}=OB_1:BB_1$  и  $S_{OAB}:S_{ABC}=OC_1:CC_1$ . Складывая эти равенства и учитывая, что  $S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=S_{ABC}$ , получаем требуемое.

б) Пусть расстояния от точек  $B$  и  $C$  до прямой  $AA_1$  равны  $d_b$  и  $d_c$ . Тогда  $S_{ABO}:S_{ACO}=d_b:d_c=BA_1:A_1C$ . Аналогично  $S_{ACO}:S_{BCO}=AC_1:C_1B$  и  $S_{BCO}:S_{ABO}=CB_1:B_1A$ . Остается перемножить эти равенства.

**4.49.** Легко проверить, что отношение длин отрезков  $A_{n+k-1}B_k$  и  $A_{n+k}B_k$  равно отношению площадей треугольников  $A_{n+k-1}OA_k$  и  $A_kOA_{n+k}$ . Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

**4.50.** Так как  $A_iB_iC_iD_i$  — параллелограмм и точка  $O$  лежит на продолжении его диагонали  $A_iC_i$ , то  $S_{A_iB_iO}=S_{A_iD_iO}$ , а значит,  $A_iB_i:A_iD_i=h_i:h_{i-1}$ , где  $h_i$  — расстояние от точки  $O$  до стороны  $A_iA_{i+1}$ . Остается перемножить эти равенства для  $i=1, \dots, n$ .

**4.51.** Пусть длины сторон треугольника  $ABC$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причем  $a\leq b\leq c$ . Тогда  $2b=a+c$  и  $2S_{ABC}=r(a+b+c)=3rb$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности. С другой стороны,  $2S_{ABC}=h_b b$ . Поэтому  $r=h_b/3$ .

**4.52.** Достаточно заметить, что  $d_b\cdot AB=2S_{AXB}=BX\cdot AX\sin\varphi$ , где  $\varphi=\angle AXB$  и  $d_c\cdot AC=2S_{AXC}=CX\cdot AX\sin\varphi$ .

**4.53.** Пусть  $r_1, \dots, r_n$  — радиусы вписанных окружностей полученных треугольников,  $P_1, \dots, P_n$  — их периметры, а  $S_1, \dots, S_n$  — площади. Площадь и периметр исходного многоугольника обозначим через  $S$  и  $P$  соответственно.

Ясно, что  $P_i < P$  (см. задачу 9.27, б). Поэтому

$$r_1 + \dots + r_n = 2 \frac{S_1}{P_1} + \dots + 2 \frac{S_n}{P_n} > 2 \frac{S_1}{P} + \dots + 2 \frac{S_n}{P} = 2 \frac{S}{P} = r.$$

**4.54.** Через точку  $N$  пересечения прямых  $BS$  и  $CM$  проведем прямые  $Q_1S_1$  и  $P_1R_1$ , параллельные прямым  $QS$  и  $PR$  (точки  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$  и  $S_1$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ ). Пусть

$F$  и  $G$  — точки пересечения прямых  $PR$  и  $Q_1S_1$ ,  $P_1R_1$  и  $QS$ . Так как точка  $M$  лежит на диагонали  $NC$  параллелограмма  $NQ_1CR_1$ , то  $S_{FQ_1QM} = S_{MRR_1G}$  (задача 4.19), а значит,  $S_{NQ_1QG} = S_{NRR_1}$ . Точка  $N$  лежит на диагонали  $BS$  параллелограмма  $ABQS$ , поэтому  $S_{AP_1NS_1} = S_{NQ_1QG} = S_{NRR_1}$ . Следовательно, точка  $N$  лежит на диагонали  $PD$  параллелограмма  $APRD$ .

**4.55.** Пусть  $E$  и  $F$  — точки пересечения продолжений сторон данного четырехугольника. Обозначим вершины четырехугольника так, что  $E$  — точка пересечения продолжений сторон  $AB$  и  $CD$  за точки  $B$  и  $C$ ,  $F$  — точка пересечения лучей  $BC$  и  $AD$ . Построим треугольники  $AEF$  и  $ABD$  до параллелограммов  $AERF$  и  $ABLD$ .

При гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом 2 середина диагонали  $BD$ , середина диагонали  $AC$  и середина отрезка  $EF$  переходят в точки  $L$ ,  $C$  и  $R$  соответственно. Поэтому достаточно доказать, что точки  $L$ ,  $C$  и  $R$  лежат на одной прямой. Именно этот факт был доказан в предыдущей задаче.

**4.56.** Достаточно проверить, что  $S_{AKO} = S_{ALO}$ , т. е.  $AO \cdot AL \sin OAL = AO \cdot AK \sin OAK$ . Ясно, что  $AL = CB_1 = BC \cos C$ ,  $\sin OAL = \cos B$ ,  $AK = BC_1 = BC \cos B$  и  $\sin OAK = \cos C$ .

**4.57.** Так как четырехугольник  $A_1BC_1M$  описанный, то, во-первых, суммы длин его противоположных сторон равны:  $\frac{a}{2} + \frac{m_c}{3} = \frac{c}{2} + \frac{m_a}{3}$ , а во-вторых, его вписанная окружность является одновременно вписанной окружностью треугольников  $AA_1B$  и  $CC_1B$ , имеющих к тому же равные площади, поэтому периметры этих треугольников равны:  $c + m_a + \frac{a}{2} = a + m_c + \frac{c}{2}$ . Умножая первое равенство на 3 и складывая его со вторым, получаем требуемое.

**4.58.** Докажем сначала одно общее утверждение, которым мы воспользуемся при решении задач а) — г). Возьмем на лучах  $AB$  и  $AC$  произвольные точки  $B_1$  и  $C_1$  и опустим из них перпендикуляры  $B_1K$  и  $C_1L$  на прямую  $AO$ . Так как  $B_1C_1 \geq B_1K + C_1L$ , то  $B_1C_1 \cdot R_a \geq B_1K \cdot R_a + C_1L \cdot R_a = 2S_{AOB_1} + 2S_{AOC_1} = AB_1 \cdot d_c + AC_1 \cdot d_b$ .

а) Полагая  $B_1 = B$  и  $C_1 = C$ , получаем требуемое.

б) Домножая обе части неравенства  $aR_a \geq cd_c + bd_b$  на  $d_a/a$ , получаем  $d_aR_a \geq (c/a)d_ad_c + (b/a)d_ad_b$ . Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами для  $d_bR_b$  и  $d_cR_c$  и учитывая, что  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , получаем требуемое.

в) Возьмем точки  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $AB_1 = AC$  и  $AC_1 = AB$ . Тогда  $aR_a \geq bd_c + cd_b$ , т. е.  $R_a \geq (b/a)d_c + (c/a)d_b$ . Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами для  $R_b$  и  $R_c$  и учитывая, что  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , получаем требуемое.

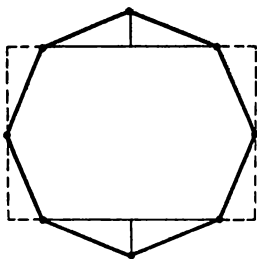


Рис. 50

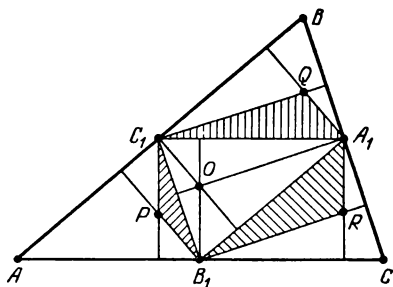


Рис. 51

г) Возьмем точки  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $AB_1 = AC_1 = 1$ . Тогда  $B_1C_1 = 2 \sin(A/2)$ , а значит,  $2 \sin(A/2) R_a \geq d_c + d_b$ . Умножая это неравенство на аналогичные неравенства для  $R_b$  и  $R_c$  и учитывая, что  $\sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2) = r/4R$  (задача 12.36, а), получаем требуемое.

**4.59.** Отрежем от правильного восьмиугольника треугольники и переставим их так, как показано на рис. 50. В результате получим прямоугольник, стороны которого равны наибольшей и наименьшей диагоналям восьмиугольника.

**4.60.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ . Проведенные отрезки являются высотами треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1B_1C_1$  и  $A_1B_1C$ . Пусть  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — точки пересечения высот этих треугольников, а  $O$  — точка пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$  (рис. 51). Рассматриваемый шестиугольник состоит из треугольника  $A_1B_1C_1$  и треугольников  $B_1C_1P$ ,  $C_1A_1Q$  и  $A_1B_1R$ . Ясно, что  $\Delta B_1C_1P = \Delta C_1B_1O$ ,  $\Delta C_1A_1Q = \Delta A_1C_1O$  и  $\Delta A_1B_1R = \Delta B_1A_1O$ . Поэтому площадь рассматриваемого шестиугольника равна удвоенной площади треугольника  $A_1B_1C_1$ . Остается заметить, что  $S_{ABC} = 4S_{A_1B_1C_1}$ .

**4.61.** а) Отрежем от параллелограмма две части (рис. 52, а) и переставим их так, как показано на рис. 52, б. Получится фигура, состоящая из  $mn+1$  маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна  $1/(mn+1)$ .

б) Отрежем от параллелограмма три части (рис. 53, а) и переставим их так, как показано на рис. 53, б. Получится фигура,

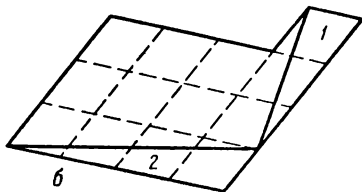
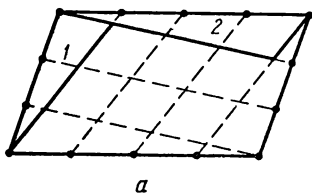


Рис. 52

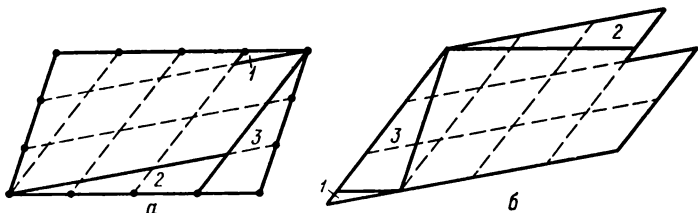


Рис. 53

состоящая из  $mn - 1$  маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна  $1/(mn - 1)$ .

4.62. а) Разрежем исходный квадрат на четыре квадрата и рассмотрим один из них (рис. 54). Пусть точка  $B'$  симметрична точке  $B$  относительно прямой  $PQ$ . Докажем, что  $\triangle APB = \triangle OB'P$ . Треугольник  $APB$  равнобедренный, причем угол при его основании равен  $15^\circ$  (задача 2.26), поэтому треугольник  $BPQ$  равносторонний. Следовательно,  $\angle OPB' = \angle OPQ - \angle B'PQ = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$  и  $\angle POB' = \angle POQ/2 = 15^\circ$ . Кроме того,  $AB = OP$ . Аналогично доказывается, что  $\triangle BQC = \triangle OB'Q$ . Следовательно, площадь заштрихованной на рис. 43 части равна площади треугольника  $OPQ$ .

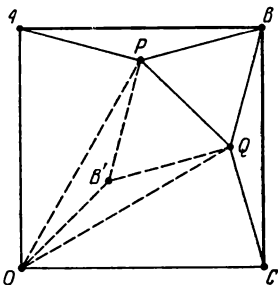


Рис. 54

б) Пусть площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 1, равна  $12x$ . Согласно задаче а) площадь квадрата, описанного около этой окружности, равна  $12x + 4x = 16x$ ; с другой стороны, площадь этого квадрата равна 4, поэтому  $x = 1/4$  и  $12x = 3$ .



## Глава 5

### ТРЕУГОЛЬНИКИ

---

#### Основные сведения

1. *Вписанной окружностью треугольника* называют окружность, касающуюся всех его сторон. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

*Вневписанной окружностью треугольника  $ABC$*  называют окружность, касающуюся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Для каждого треугольника имеется ровно три вневписанные окружности. Центром вневписанной окружности, касающейся стороны  $AB$ , является точка пересечения биссектрисы угла  $C$  и биссектрис внешних углов  $A$  и  $B$ .

*Описанной окружностью треугольника* называют окружность, проходящую через его вершины. Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Для элементов треугольника  $ABC$  часто используются следующие обозначения:

$a, b$  и  $c$  — длины сторон  $BC, CA$  и  $AB$ ;

$\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — величины углов при вершинах  $A, B, C$ ;

$R$  — радиус описанной окружности;

$r$  — радиус вписанной окружности;

$r_a, r_b$  и  $r_c$  — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно;

$h_a, h_b$  и  $h_c$  — длины высот, опущенных из вершин  $A, B$  и  $C$ .

3. Если  $AD$  — биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  (или биссектриса внешнего угла  $A$ ), то  $BD:CD = AB:AC$  (см. задачу 1.17).

4. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы (см. задачу 5.16).

5. Для доказательства того, что точки пересечения некоторых прямых лежат на одной прямой, часто используется теорема Менелая (задача 5.58).

Для доказательства того, что некоторые прямые пересекаются в одной точке, часто используется теорема Чевы (см. задачу 5.70).

#### Вводные задачи

1. а) Докажите, что если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

б) Докажите, что если в треугольнике биссектриса совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

2. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. На высоте  $AH$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ . Докажите, что  $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$ .

4. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  правильного треугольника  $ABC$  взяты точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  так, что  $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2:1$ . Докажите, что стороны треугольника  $PQR$  перпендикулярны сторонам треугольника  $ABC$ .

## § 1. Вписанная и описанная окружности

5.1. На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , причем  $AC_1=AB_1$ ,  $BA_1=BC_1$  и  $CA_1=CB_1$ . Докажите, что  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки касания вписанной окружности со сторонами.

5.2. Пусть  $O_a$ ,  $O_b$  и  $O_c$  — центры вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  — основания высот треугольника  $O_aO_bO_c$ .

5.3. Докажите, что сторона  $BC$  треугольника  $ABC$  видна из центра  $O$  вписанной окружности под углом  $90^\circ + \angle A/2$ , а из центра  $O_a$  вневписанной окружности под углом  $90^\circ - \angle A/2$ .

5.4. Внутри треугольника  $ABC$  взята такая точка  $P$ , что  $\angle PAB : \angle PAC = \angle PCA : \angle PCB = \angle PCB : \angle PBC : \angle PBA = x$ . Докажите, что  $x=1$ .

5.5. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — проекции некоторой внутренней точки  $O$  треугольника  $ABC$  на высоты. Докажите, что если длины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  равны, то они равны  $2r$ .

5.6. Угол величиной  $\alpha = \angle BAC$  вращается вокруг своей вершины  $O$  — середины основания  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Стороны этого угла пересекают отрезки  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что периметр треугольника  $PBQ$  остается постоянным.

5.7. В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  через середину  $M$  стороны  $BC$  и центр  $O$  вписанной окружности проведена прямая  $MO$ , пересекающая высоту  $AH$  в точке  $E$ . Докажите, что  $AE=r$ .

5.8. Окружность касается сторон угла с вершиной  $A$  в точках  $P$  и  $Q$ . Расстояния от точек  $P$ ,  $Q$  и  $A$  до некоторой касательной к этой окружности равны  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Докажите, что  $uv/w^2 = \sin^2(A/2)$ .

\* \* \*

5.9. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника  $ABC$  относительно его сторон, лежат на описанной окружности.

**5.10.** Из точки  $P$  дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $PX$ ,  $PY$  и  $PZ$  на  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что  $\frac{BC}{PX} = \frac{AC}{PY} + \frac{AB}{PZ}$ .

\* \* \*

**5.11.** Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $I$  — центр вписанной окружности,  $I_a$  — центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Докажите, что:

а)  $d^2 = R^2 - 2Rr$ , где  $d = OI$ ;

б)  $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ , где  $d_a = OI_a$ .

**5.12.** Продолжения биссектрис углов треугольника  $ABC$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ ;  $M$  — точка пересечения биссектрис. Докажите, что:

а)  $\frac{MA \cdot MC}{MB_1} = 2r$ ; б)  $\frac{MA_1 \cdot MC_1}{MB} = R$ .

**5.13.** Длины сторон треугольника  $ABC$  образуют арифметическую прогрессию, причем  $a < b < c$ . Биссектриса угла  $B$  пересекает описанную окружность в точке  $B_1$ . Докажите, что центр  $O$  вписанной окружности делит отрезок  $BB_1$  пополам.

**5.14.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  наименьшая. На лучах  $BA$  и  $CA$  отложены отрезки  $BD$  и  $CE$ , равные  $BC$ . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника  $ADE$  равен расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ .

## § 2. Прямоугольные треугольники

**5.15.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой. Докажите, что  $r = (a + b - c)/2$  и  $r_c = (a + b + c)/2$ .

**5.16.** Пусть  $M$  — середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $CM = AB/2$  тогда и только тогда, когда  $\angle ACB = 90^\circ$ .

**5.17.** Дана трапеция  $ABCD$  с основанием  $AD$ . Биссектрисы внешних углов при вершинах  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $P$ , а при вершинах  $C$  и  $D$  — в точке  $Q$ . Докажите, что длина отрезка  $PQ$  равна половине периметра трапеции.

**5.18.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  проведена биссектриса  $CD$ . Прямая, проходящая через точку  $D$  перпендикулярно  $DC$ , пересекает  $AC$  в точке  $E$ . Докажите, что  $EC = 2AD$ .

**5.19.** Сумма углов при основании трапеции равна  $90^\circ$ . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

**5.20.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CK$  из вершины прямого угла  $C$ , а в треугольнике  $ACK$  — биссектриса  $CE$ . Докажите, что  $CB = BE$ .

**5.21.** В треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведены высота  $CD$  и биссектриса  $CF$ ;  $DK$  и  $DL$  — биссектрисы треугольников  $BDC$  и  $ADC$ . Докажите, что  $CLFK$  — квадрат.

**5.22.** На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  внешним образом построен квадрат  $ABPQ$ . Пусть  $\alpha = \angle ACQ$ ,  $\beta = \angle QCP$  и  $\gamma = \angle PCB$ . Докажите, что  $\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma$ .

См. также задачи 2.65, 5.62.

### § 3. Правильный треугольник

**5.23.** Из точки  $M$ , лежащей внутри правильного треугольника  $ABC$ , опущены перпендикуляры  $MP$ ,  $MQ$  и  $MR$  на стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно. Докажите, что  $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$  и  $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$ .

**5.24.** Точки  $D$  и  $E$  делят стороны  $AC$  и  $AB$  правильного треугольника  $ABC$  в отношениях  $AD:DC = BE:EA = 1:2$ . Прямые  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $\angle AOC = 90^\circ$ .

\* \* \*

**5.25.** Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

**5.26.** Докажите, что если точка пересечения высот остроугольного треугольника делит высоты в одном и том же отношении, то треугольник правильный.

**5.27.** а) Докажите, что если  $a + h^a = b + h^b = c + h^c$ , то треугольник  $ABC$  правильный.

б) В треугольник  $ABC$  вписаны три квадрата: у одного две вершины лежат на стороне  $AC$ , у другого — на  $BC$ , у третьего — на  $AB$ . Докажите, что если все три квадрата равны, то треугольник  $ABC$  правильный.

**5.28.** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся его сторон в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что если треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны, то треугольник  $ABC$  правильный.

**5.29.** Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, длины высот — целые числа. Докажите, что треугольник правильный.

См. также задачи 2.18, 2.26, 2.36, 2.44, 2.54, 4.46, 5.56, 7.45, 10.3, 10.77, 11.3, 11.5, 16.7, 18.9, 18.12, 18.15, 18.17—18.20, 18.22, 18.38, 24.1.

#### § 4. Треугольники с углами $60^\circ$ и $120^\circ$

**5.30.** В треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $120^\circ$ , проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  прямоугольный.

**5.31.** В треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $120^\circ$ , биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $\angle A_1C_1O = 30^\circ$ .

**5.32.** а) Докажите, что если угол  $A$  треугольника  $ABC$  равен  $120^\circ$ , то центр описанной окружности и ортоцентр симметричны относительно биссектрисы внешнего угла  $A$ .

б) В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ ;  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — ортоцентр,  $I$  — центр вписанной окружности, а  $I_a$  — центр невписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Докажите, что  $IO = IH$  и  $I_aO = I_aH$ .

**5.33.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ . Докажите, что из отрезков длиной  $a$ ,  $b$ ,  $b+c$  можно составить треугольник.

**5.34.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  с углом  $A$ , равным  $60^\circ$ , высоты пересекаются в точке  $H$ .

а) Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $BH$  и  $CH$  со сторонами  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что точки  $M$ ,  $N$  и  $H$  лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит центр  $O$  описанной окружности.

**5.35.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что если  $\angle CC_1B_1 = 30^\circ$ , то либо  $\angle A = 60^\circ$ , либо  $\angle B = 120^\circ$ .

См. также задачу 2.33.

#### § 5. Целочисленные треугольники

**5.36.** Длины сторон треугольника — последовательные целые числа. Найдите эти числа, если известно, что одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис.

**5.37.** Длины всех сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, причем наибольший общий дели-

тель этих чисел равен 1. Докажите, что его катеты равны  $2mn$  и  $m^2 - n^2$ , а гипотенуза равна  $m^2 + n^2$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа.

Прямоугольный треугольник, длины сторон которого целые числа, называют *пифагоровым*.

**5.38.** Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а длины его сторон — целые числа. Докажите, что эти числа равны 3, 4, 5.

**5.39.** Приведите пример вписанного четырехугольника с попарно различными целочисленными длинами сторон, у которого длины диагоналей, площадь и радиус описанной окружности — целые числа (Брахмагупта).

**5.40.** а) Укажите два прямоугольных треугольника, из которых можно сложить треугольник, длины сторон и площадь которого — целые числа.

б) Докажите, что если площадь треугольника — целое число, а длины сторон — последовательные натуральные числа, то этот треугольник можно сложить из двух прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами.

**5.41.** а) В треугольнике  $ABC$ , длины сторон которого рациональные числа, проведена высота  $BB_1$ . Докажите, что длины отрезков  $AB_1$  и  $CB_1$  — рациональные числа.

б) Длины сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника — рациональные числа. Докажите, что диагонали разрезают его на четыре треугольника, длины сторон которых рациональные числа.

См. также задачу 26.7.

## § 6. Разные задачи

**5.42.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  таковы, что их соответственные углы равны или составляют в сумме  $180^\circ$ . Докажите, что в действительности все соответственные углы равны.

**5.43.** Внутри треугольника  $ABC$  взята произвольная точка  $O$  и построены точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , симметричные  $O$  относительно середин сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Докажите, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  и прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

**5.44.** Через точку  $O$  пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  проведены прямые, параллельные его сторонам. Прямая, параллельная  $AB$ , пересекает  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ , а прямые, параллельные  $AC$  и  $BC$ , пересекают  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $MN = AM + BN$  и периметр треугольника  $OPQ$  равен длине отрезка  $AB$ .

5.45. а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

б) Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $R$  — радиус описанной окружности. Докажите, что  $AH^2 + BC^2 = 4R^2$  и  $AH = BC |\operatorname{ctg} \alpha|$ .

5.46. Пусть  $x = \sin 18^\circ$ . Докажите, что  $4x^2 + 2x = 1$ .

5.47. Докажите, что проекции вершины  $A$  треугольника  $ABC$  на биссектрисы внешних и внутренних углов при вершинах  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой.

5.48. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то он равнобедренный.

5.49. а) В треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$  равны стороны  $AC$  и  $A'C'$ , углы при вершинах  $B$  и  $B'$  и биссектрисы углов  $B$  и  $B'$ . Докажите, что эти треугольники равны (точнее говоря,  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  или  $\triangle ABC = \triangle C'B'A'$ ).

б) Через точку  $D$  биссектрисы  $BB_1$  угла  $ABC$  проведены прямые  $AA_1$  и  $CC_1$  (точки  $A_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах треугольника). Докажите, что если  $AA_1 = CC_1$ , то  $AB = BC$ .

5.50. Докажите, что прямая делит периметр и площадь треугольника в равных отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности.

5.51. Точка  $E$  — середина той дуги  $AB$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , на которой лежит точка  $C$ ;  $C_1$  — середина стороны  $AB$ . Из точки  $E$  опущен перпендикуляр  $EF$  на  $AC$ . Докажите, что:

а) прямая  $C_1F$  делит пополам периметр треугольника  $ABC$ ;

б) три такие прямые, построенные для каждой стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

5.52. На сторонах  $AB$  и  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  внешним образом построены квадраты  $ABC_1D_1$  и  $A_2BCD_2$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $AD_2$  и  $CD_1$  лежит на высоте  $BH$ .

5.53. На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены квадраты с центрами  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Пусть  $a_1$ ,  $b_1$  и  $c_1$  — длины сторон треугольника  $A_1B_1C_1$ ,  $S$  и  $S_1$  — площади треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что:

а)  $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$ ;

б)  $S_1 - S = (a^2 + b^2 + c^2)/8$ .

5.54. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  (или на их продолжениях) взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  так, что  $\angle(CC_1, AB) = \angle(AA_1, BC) = \angle(BB_1, CA) = \alpha$ . Прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ ,  $CC_1$  и  $AA_1$  пересекаются в точках  $C'$ ,  $A'$ ,  $B'$  соответственно. Докажите, что:

а) точка пересечения высот треугольника  $ABC$  совпадает с центром описанной окружности треугольника  $A'B'C'$ ;

6)  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ , причем коэффициент подобия равен  $2 \cos \alpha$ .

5.55. На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $AB_1 : B_1C = c^n : a^n$ ,  $BC_1 : C_1A = a^n : b^n$  и  $CA_1 : A_1B = b^n : c^n$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон треугольника). Описанная окружность треугольника  $A_1B_1C_1$  высекает на сторонах треугольника  $ABC$  отрезки длиной  $\pm x$ ,  $\pm y$  и  $\pm z$  (знаки выбираются в соответствии с ориентацией треугольника). Докажите, что  $\frac{x}{a^{n-1}} + \frac{y}{b^{n-1}} + \frac{z}{c^{n-1}} = 0$ .

5.56. В треугольнике  $ABC$  проведены триссектрисы (лучи, делящие углы на три равные части). Ближайшие к стороне  $BC$  триссектрисы углов  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $A_1$ ; аналогично определим точки  $B_1$  и  $C_1$  (рис. 55). Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  равносторонний (теорема Морли).

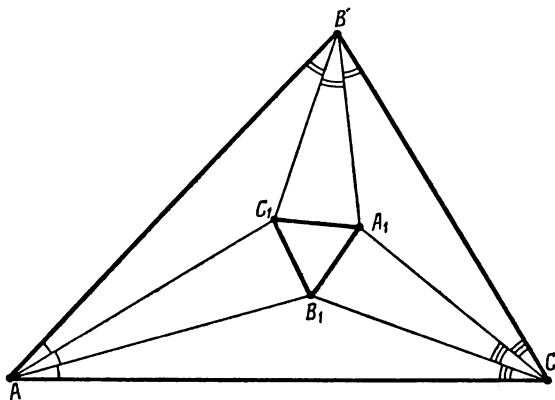


Рис. 55

5.57. На сторонах правильного треугольника  $ABC$  как на основаниях внутренним образом построены равнобедренные треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$  с углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при основаниях, причем  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ . Прямые  $BC_1$  и  $B_1C$  пересекаются в точке  $A_2$ ,  $AC_1$  и  $A_1C$  — в точке  $B_2$ ,  $AB_1$  и  $A_1B$  — в точке  $C_2$ . Докажите, что углы треугольника  $A_2B_2C_2$  равны  $3\alpha$ ,  $3\beta$  и  $3\gamma$ .

## § 7. Теорема Менелая

Пусть  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  — коллинеарные векторы. Обозначим через  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$  величину  $\pm \frac{AB}{CD}$ , где знак плюс берется в том случае, когда векторы



$\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  сонаправлены, а знак минус — в случае, когда векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  направлены в разные стороны.

**5.58.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  (или на их продолжениях) взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1 \quad (\text{теорема Менелая}).$$

**5.59.** Решите задачу 5.85, а) с помощью теоремы Менелая.

**5.60.** Окружность  $S$  касается окружностей  $S_1$  и  $S_2$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Докажите, что прямая  $A_1A_2$  проходит через точку пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям  $S_1$  и  $S_2$ .

**5.61.** а) Серединный перпендикуляр к биссектрисе  $AD$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $E$ . Докажите, что  $BE:CE = c^2:b^2$ .

б) Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.

**5.62.** Из вершины  $C$  прямого угла треугольника  $ABC$  опущена высота  $CK$ , и в треугольнике  $ACK$  проведена биссектриса  $CE$ . Прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $CE$ , пересекает  $CK$  в точке  $F$ . Докажите, что прямая  $EF$  делит отрезок  $AC$  пополам.

**5.63.** На прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , причем точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой. Прямые, симметричные прямым  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  относительно соответствующих биссектрис треугольника  $ABC$ , пересекают прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Докажите, что точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  лежат на одной прямой.

\* \* \*

**5.64.** Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $O$ . Докажите, что точки пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  лежат на одной прямой (теорема Дезарга).

**5.65.** На одной прямой взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , а на другой — точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Прямые  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$ ,  $B_1C_2$  и  $B_2C_1$ ,  $C_1A_2$  и  $C_2A_1$  пересекаются в точках  $C$ ,  $A$  и  $B$  соответственно. Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой (теорема Паппа).

**5.66.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  (или на их продолжениях) взяты точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ . Прямые  $KL$  и  $AC$  пересекаются в точке  $P$ ,  $LM$  и  $BD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $KQ$  и  $MP$  лежит на прямой  $AD$ .

**5.67.** Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Через точку  $P$  проведена прямая, пересекающая стороны  $BC$  и  $AD$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников  $ABCD$ ,  $ABEF$  и  $CDFE$  лежат на прямой, проходящей через точку  $Q$ .

**5.68.** а) Через точки  $P$  и  $Q$  проведены тройки прямых. Обозначим их точки пересечения так, как показано на рис. 56.

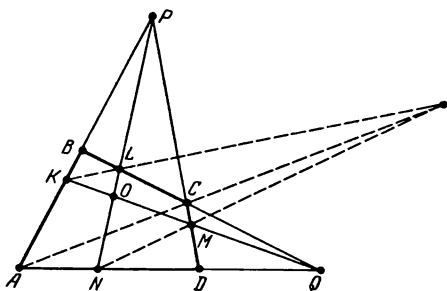


Рис. 56

Докажите, что прямые  $KL$ ,  $AC$  и  $MN$  пересекаются в одной точке (или параллельны).

б) Докажите далее, что если точка  $O$  лежит на прямой  $BD$ , то точка пересечения прямых  $KL$ ,  $AC$  и  $MN$  лежит на прямой  $PQ$ .

**5.69.** На прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Пусть  $P_1$  — произвольная точка прямой  $BC$ ,  $P_2$  — точка пересечения прямых  $P_1B_1$  и  $AB$ ,  $P_3$  — точка пересечения прямых  $P_2A_1$  и  $CA$ ,  $P_4$  — точка пересечения  $P_3C_1$  и  $BC$  и т. д. Докажите, что точки  $P_7$  и  $P_1$  совпадают.

См. также задачу 6.98.

## § 8. Теорема Чевы

**5.70.** Дан треугольник  $ABC$ . На прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  взяты точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ , причем  $k$  из них лежат на сторонах треугольника и  $3-k$  — на продолжениях сторон. Пусть

$$R = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}.$$

Докажите, что:

а) точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $R=1$  и  $k$  четно (теорема Менелая);

б) прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда  $R=1$  и  $k$  нечетно (теорема Чевы).

**5.71.** Вписанная (или невписанная) окружность треугольника  $ABC$  касается прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

**5.72.** Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

**5.73.** Прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пересекают стороны треугольника  $ABC$  (или их продолжения) в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что:

а) прямые, проходящие через середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  параллельно прямым  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$ , пересекаются в одной точке;

б) прямые, соединяющие середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  с серединами отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекаются в одной точке.

**5.74.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Прямые  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  пересекают прямую, проходящую через вершину  $A$  параллельно стороне  $BC$ , в точках  $C_2$  и  $B_2$  соответственно. Докажите, что  $AB_2 = AC_2$ .

**5.75.** а) Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — произвольные углы, причем сумма любых двух из них меньше  $180^\circ$ . На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ , имеющие при вершинах  $A$ ,  $B$  и  $C$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

б) Докажите аналогичное утверждение для треугольников, построенных на сторонах треугольника  $ABC$  внутренним образом.

**5.76.** Стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  касаются окружности с центром  $O$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . На лучах  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  отложены равные отрезки  $OA_2$ ,  $OB_2$  и  $OC_2$ . Докажите, что прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  пересекаются в одной точке.

**5.77.** Прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пересекают прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  выбраны на прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  так, что  $BA_2 : A_2C = A_1C : BA_1$ ,  $CB_2 : B_2A = B_1A : CB_1$  и  $AC_2 : C_2B =$

$= \overline{C_1 B} : \overline{AC_1}$ . Докажите, что прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  тоже пересекаются в одной точке  $Q$  (или параллельны).

Такие точки  $P$  и  $Q$  называют *изотомически сопряженными относительно треугольника  $ABC$* .

**5.78.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1 B} \cdot \frac{BA_1}{A_1 C} \cdot \frac{CB_1}{B_1 A} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1 CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1 AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1 BA}.$$

**5.79.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , причем прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $P$ . Докажите, что прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$ , симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке  $Q$ .

Такие точки  $P$  и  $Q$  называют *изогонально сопряженными относительно треугольника  $ABC$* .

**5.80.** Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

**5.81.** Из некоторой точки  $P$  опущены перпендикуляры  $PA_1$  и  $PA_2$  на сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  и на высоту  $AA_3$ . Аналогично определяются точки  $B_1$ ,  $B_2$  и  $C_1$ ,  $C_2$ . Докажите, что прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  пересекаются в одной точке или параллельны.

**5.82.** Через точки  $A$  и  $D$ , лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке  $S$ . На дуге  $AD$  взяты точки  $B$  и  $C$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ ,  $AB$  и  $CD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что прямая  $PQ$  проходит через точку  $S$ .

**5.83.** а) На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AB$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1 B} = \frac{\sin ABB_1 \sin CAA_1}{\sin BAA_1 \sin CBB_1}.$$

б) Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AB$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $\angle CAM = \angle ABN$  и  $\angle CBM = \angle BAN$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

**5.84.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекают отрез-

ки  $C_1B_1$  и  $B_1A_1$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $\angle MBB_1 = \angle NBB_1$ .

См. также задачи 10.56, 14.7, 14.38.

## § 9. Прямая Симсона

5.85. а) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

б) Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки  $P$  на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника.

5.86. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, точка  $P$  — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $ACP$  и точка  $P$  лежат на одной окружности.

5.87. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$  и из точки  $D$  опущены перпендикуляры  $DB'$  и  $DC'$  на прямые  $AC$  и  $AB$ ; точка  $M$  лежит на прямой  $B'C'$ , причем  $DM \perp BC$ . Докажите, что точка  $M$  лежит на медиане  $AA_1$ .

5.88. а) Из точки  $P$  описанной окружности треугольника  $ABC$  проведены прямые  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  под данным (ориентированным) углом  $\alpha$  к прямым  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно (точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ ). Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

б) Докажите, что при замене в определении прямой Симсона угла  $90^\circ$  на угол  $\alpha$  она повернется на угол  $90^\circ - \alpha$ .

5.89. а) Из точки  $P$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $PA_1$  и  $PB_1$  на прямые  $BC$  и  $AC$ . Докажите, что  $PA \cdot PA_1 = 2Rd$ , где  $R$  — радиус описанной окружности,  $d$  — расстояние от точки  $P$  до прямой  $A_1B_1$ .

б) Пусть  $\alpha$  — угол между прямыми  $A_1B_1$  и  $BC$ . Докажите, что  $\cos \alpha = PA/2R$ .

5.90. Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — проекции точки  $P$  описанной окружности треугольника  $ABC$  на прямые  $BC$  и  $AC$ . Докажите, что длина отрезка  $A_1B_1$  равна длине проекции отрезка  $AB$  на прямую  $A_1B_1$ .

5.91. На окружности фиксированы точки  $P$  и  $C$ ; точки  $A$  и  $B$  перемещаются по окружности так, что угол  $ACB$  остается постоянным. Докажите, что прямые Симсона точки  $P$  относительно треугольников  $ABC$  касаются фиксированной окружности.

**5.92.** Точка  $P$  движется по описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что при этом прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой  $P$ .

**5.93.** Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника  $ABC$  перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек (см. задачу 5.106).

**5.94.** Точки  $A, B, C, P$  и  $Q$  лежат на окружности с центром  $O$ , причем углы между вектором  $\vec{OP}$  и векторами  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  и  $\vec{OQ}$  равны  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $(\alpha + \beta + \gamma)/2$ . Докажите, что прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  параллельна  $OQ$ .

**5.95.** Хорда  $PQ$  описанной окружности треугольника  $ABC$  перпендикулярна стороне  $BC$ . Докажите, что прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  параллельна прямой  $AQ$ .

**5.96.** Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ ;  $P$  — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  делит отрезок  $PH$  пополам.

**5.97.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность;  $l_a$  — прямая Симсона точки  $A$  относительно треугольника  $BCD$ , прямые  $l_b, l_c$  и  $l_d$  определяются аналогично. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

**5.98.** а) Докажите, что проекции точки  $P$  описанной окружности четырехугольника  $ABCD$  на прямые Симсона треугольников  $BCD, CDA, DAB$  и  $BAC$  лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырехугольника).

б) Докажите, что аналогично по индукции можно определить прямую Симсона вписанного  $n$ -угольника как прямую, содержащую проекции точки  $P$  на прямые Симсона всех  $(n-1)$ -угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин  $n$ -угольника.

См. также задачи 5.10, 5.59.

## § 10. Подерный треугольник

Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC, CA$  и  $AB$ . Треугольник  $A_1B_1C_1$  называют *подерным* (или *педальным*) треугольником точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

**5.99.** Пусть  $A_1B_1C_1$  — подерный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $B_1C_1 =$

$= BC \cdot AP / 2R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**5.100.** Прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ ;  $A_1B_1C_1$  — поперный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ .

**5.101.** Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  дана точка  $P$ . Опустив из нее перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  на стороны, получим  $\triangle A_1B_1C_1$ . Проделав для него ту же операцию, получим  $\triangle A_2B_2C_2$ , а затем  $\triangle A_3B_3C_3$ . Докажите, что  $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$ .

**5.102.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ . Докажите, что площадь поперного треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| S_{ABC}$ , где  $d = PO$ .

**5.103.** Из точки  $P$  опущены перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  на стороны треугольника  $ABC$ . Прямая  $l_a$  соединяет середины отрезков  $PA$  и  $B_1C_1$ . Аналогично определяются прямые  $l_b$  и  $l_c$ . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

**5.104.** а) Точки  $P_1$  и  $P_2$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$  (см. с. 115). Докажите, что их поперные треугольники имеют общую описанную окружность, причем ее центром является середина отрезка  $P_1P_2$ .

б) Докажите, что это утверждение останется верным, если из точек  $P_1$  и  $P_2$  проводить не перпендикуляры к сторонам, а прямые под данным (ориентированным) углом.

См. также задачи 5.132, 5.133, 14.19, б).

## § 11. Прямая Эйлера и окружность девяти точек

**5.105.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр описанной окружности,  $M$  — точка пересечения медиан. Докажите, что точка  $M$  лежит на отрезке  $OH$ , причем  $OM:MH = 1:2$ . (Прямую, содержащую точки  $O$ ,  $M$  и  $H$ , называют *прямой Эйлера*).

**5.106.** Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности (*окружности девяти точек*), причем центром этой окружности является середина отрезка  $OH$ .

**5.107.** Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ .

а) Докажите, что треугольники  $ABC$ ,  $HBC$ ,  $ANC$  и  $ABH$  имеют общую окружность девяти точек.

б) Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $ABC$ ,  $HBC$ ,  $AHC$  и  $ABH$  пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $HBC$ ,  $AHC$  и  $ABH$  образуют четырехугольник, симметричный четырехугольнику  $HABC$ .

**5.108.** Какие стороны пересекает прямая Эйлера в остроугольном и тупоугольном треугольниках.

**5.109.** а) Докажите, что описанная окружность треугольника  $ABC$  является окружностью девяти точек для треугольника, образованного центрами внеписанных окружностей треугольника  $ABC$ .

б) Докажите, что описанная окружность делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и внеписанной окружностей.

**5.110.** Докажите, что прямая Эйлера треугольника  $ABC$  параллельна стороне  $BC$  тогда и только тогда, когда  $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$ .

**5.111.** Докажите, что отрезок, отсекаемый на стороне  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  окружностью девяти точек, виден из ее центра под углом  $2|\angle A - \angle B|$ .

**5.112.** Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.

**5.113.** Вписанная окружность касается сторон треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что прямая Эйлера треугольника  $A_1B_1C_1$  проходит через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**5.114.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Пусть  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  — диаметры окружности девяти точек треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  пересекаются в одной точке (или параллельны).

См. также задачи 3.65, а), 13.34, б).

## § 12. Точки Брокера

**5.115.** а) Докажите, что внутри треугольника  $ABC$  существует такая точка  $P$ , что  $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$ .

б) На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены подобные ему треугольники  $CA_1B$ ,  $CAB_1$  и  $C_1AB$  (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т. д.). Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке, причем эта точка совпадает с точкой задачи а).

Точку  $P$  называют *точкой Брокера* треугольника  $ABC$ . Аналогично доказывается, что существует еще и вторая точка Брокера  $Q$ , для которой  $\angle BAQ = \angle ACQ = \angle CBQ$ .



5.116. а) Через точку Брокера  $P$  треугольника  $ABC$  проведены прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$ , пересекающие описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $\Delta ABC \sim \Delta B_1C_1A_1$ .

б) Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $S$ . Докажите, что треугольник, образованный точками пересечения прямых  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$  с окружностью  $S$ , может быть равен треугольнику  $ABC$  не более чем для восьми различных точек  $P$ . (Предполагается, что точки пересечения прямых  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$  с окружностью отличны от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ .)

5.117. а) Пусть  $P$  — точка Брокера треугольника  $ABC$ . Угол  $\varphi = \angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$  называется углом Брокера этого треугольника. Докажите, что  $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma$ .

б) Докажите, что точки Брокера треугольника  $ABC$  изогонально сопряжены (см. с. 115).

в) Касательная к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $C$  и прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $AC$ , пересекаются в точке  $A_1$ . Докажите, что угол Брокера треугольника  $ABC$  равен углу  $A_1AC$ .

5.118. а) Докажите, что угол Брокера любого треугольника не превосходит  $30^\circ$ .

б) Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ . Докажите, что один из углов  $ABM$ ,  $BCM$  и  $CAM$  не превосходит  $30^\circ$ .

5.119. Пусть  $Q$  — вторая точка Брокера треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр его описанной окружности,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — центры описанных окружностей треугольников  $CAQ$ ,  $ABQ$  и  $BCQ$ . Докажите, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  и  $O$  — первая точка Брокера треугольника  $A_1B_1C_1$ .

5.120. Пусть  $P$  — точка Брокера треугольника  $ABC$ ;  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  — радиусы описанных окружностей треугольников  $ABP$ ,  $BCP$  и  $CAP$ . Докажите, что  $R_1R_2R_3 = R^3$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

5.121. Пусть  $P$  и  $Q$  — первая и вторая точки Брокера треугольника  $ABC$ . Прямые  $CP$  и  $BQ$ ,  $AP$  и  $CQ$ ,  $BP$  и  $AQ$  пересекаются в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $A_1B_1C_1$  проходит через точки  $P$  и  $Q$ .

5.122. На сторонах  $CA$ ,  $AB$  и  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $\angle AB_1A_1 = \angle BC_1B_1 = \angle CA_1C_1$ . Докажите, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ , причем центр поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой, совпадает с первой точкой Брокера обоих треугольников.

См. также задачу 19.55.

### § 13. Точка Лемуана

Пусть  $AM$  — медиана треугольника  $ABC$ , а прямая  $AS$  симметрична прямой  $AM$  относительно биссектрисы угла  $A$  (точка  $S$  лежит на отрезке  $BC$ ). Тогда отрезок  $AS$  называют *симедианой* треугольника  $ABC$ ; иногда симедианой называется луч  $AS$ .

Симедианы треугольника пересекаются в точке, изогонально сопряженной точке пересечения медиан (см. с. 115). Точку пересечения симедиан треугольника называют *точкой Лемуана*.

**5.123.** Прямые  $AM$  и  $AN$  симметричны относительно биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  (точки  $M$  и  $N$  лежат на прямой  $BC$ ). Докажите, что  $BM \cdot BN / (CM \cdot CN) = c^2 / b^2$ . В частности, если  $AS$  — симедиана, то  $BS / CS = c^2 / b^2$ .

**5.124.** Выразите длину симедианы  $AS$  через длины сторон треугольника  $ABC$ .

**5.125.** Отрезок  $B_1C_1$ , где точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на лучах  $AC$  и  $AB$ , называют *антипараллельным* стороне  $BC$ , если  $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$  и  $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$ . Докажите, что симедиана  $AS$  делит пополам любой отрезок  $B_1C_1$ , антипараллельный стороне  $BC$ .

**5.126.** Касательная в точке  $B$  к описанной окружности  $S$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $K$ . Из точки  $K$  проведена вторая касательная  $KD$  к окружности  $S$ . Докажите, что  $BD$  — симедиана треугольника  $ABC$ .

**5.127.** Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точки  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $AP$  содержит симедиану  $AS$ .

**5.128.** Окружность  $S_1$  проходит через точки  $A$  и  $B$  и касается прямой  $AC$ , окружность  $S_2$  проходит через точки  $A$  и  $C$  и касается прямой  $AB$ . Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника  $ABC$ .

**5.129.** Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $D$  и  $E$ . Окружность с диаметром  $DE$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $X$ . Докажите, что  $AX$  — симедиана треугольника  $ABC$ .

\* \* \*

**5.130.** Докажите, что точка Лемуана треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  является серединой высоты  $CH$ .

**5.131.** Через точку  $X$ , лежащую внутри треугольника  $ABC$ , проведены три отрезка, антипараллельных его сторонам (см. задачу 5.125). Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда  $X$  — точка Лемуана.

**5.132.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точки Лемуана  $K$  на стороны треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $K$  — точка пересечения медиан треугольника  $A_1B_1C_1$ .

**5.133.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точки Лемуана  $K$  треугольника  $ABC$  на стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Докажите, что медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  перпендикулярна прямой  $B_1C_1$ .

**5.134.** Прямые  $AK$ ,  $BK$  и  $CK$ , где  $K$  — точка Лемуана треугольника  $ABC$ , пересекают описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $K$  — точка Лемуана треугольника  $A_1B_1C_1$ .

**5.135.** Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

См. также задачи 11.22, 19.54, 19.55.

### Задачи для самостоятельного решения

**5.136.** Докажите, что проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного первой стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

**5.137.** Докажите, что площадь треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей треугольника  $ABC$  равна  $2pR$ .

**5.138.** Равнобедренный треугольник с основанием  $a$  и боковой стороной  $b$  и равнобедренный треугольник с основанием  $b$  и боковой стороной  $a$  вписаны в окружность радиуса  $R$ . Докажите, что если  $a \neq b$ , то  $ab = \sqrt{5}R^2$ .

**5.139.** Вписанная окружность прямоугольного треугольника  $ABC$  касается гипотенузы  $AB$  в точке  $P$ ;  $CH$  — высота треугольника  $ABC$ . Докажите, что центр вписанной окружности треугольника  $ACH$  лежит на перпендикуляре, опущенном из точки  $P$  на  $AC$ .

**5.140.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $CA$  и  $AB$  в точках  $B_1$  и  $C_1$ , а вневписанная окружность касается продолжения сторон в точках  $B_2$  и  $C_2$ . Докажите, что середина стороны  $BC$  равноудалена от прямых  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ .

**5.141.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Пусть  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $ABD$  и  $ACD$ . Докажите, что  $OO_1 = OO_2$ .

**5.142.** Треугольник, составленный: а) из медиан; б) из высот треугольника  $ABC$ , подобен треугольнику  $ABC$ . Каким соотношением связаны длины сторон треугольника  $ABC$ ?

**5.143.** Через центр  $O$  правильного треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$

в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что одно из чисел  $1/OA_1$ ,  $1/OB_1$  и  $1/OC_1$  равно сумме двух других.

**5.144.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что если  $\angle A = 45^\circ$ , то  $B_1C_1$  — диаметр окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

**5.145.** Углы треугольника  $ABC$  удовлетворяют соотношению  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$ . Докажите, что его описанная окружность и окружность девяти точек пересекаются под прямым углом.

## Решения

**5.1.** Пусть  $AC_1 = AB_1 = x$ ,  $BA_1 = BC_1 = y$  и  $CA_1 = CB_1 = z$ . Тогда  $a = y + z$ ,  $b = z + x$  и  $c = x + y$ . Вычитая третье равенство из суммы первых двух, получаем  $z = (a + b - c)/2$ . Поэтому, если треугольник  $ABC$  задан, то положение точек  $A_1$  и  $B_1$  определено однозначно. Аналогично положение точки  $C_1$  определено однозначно. Остается заметить, что точки касания вписанной окружности со сторонами удовлетворяют указанным в условии задачи соотношениям.

**5.2.** Лучи  $CO_a$  и  $CO_b$  — биссектрисы внешних углов при вершине  $C$ , поэтому  $C$  лежит на прямой  $O_aO_b$  и  $\angle O_aCB = \angle O_bCA$ . Так как  $CO_c$  — биссектриса угла  $BCA$ , то  $\angle BCO_c = \angle ACO_c$ . Складывая эти равенства, получаем  $\angle O_aCO_c = \angle O_cCO_b$ , т. е.  $O_cC$  — высота треугольника  $O_aO_bO_c$ . Аналогично доказывается, что  $O_aA$  и  $O_bB$  — высоты этого треугольника.

**5.3.** Ясно, что  $\angle BOC = 180^\circ - \angle CBO - \angle BCO = 180^\circ - \angle B/2 - \angle C/2 = 90^\circ + \angle A/2$ , а  $\angle BO_aC = 180^\circ - \angle BOC$ , так как  $\angle OBO_a = \angle OCO_a = 90^\circ$ .

**5.4.** Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ ,  $O$  — точка их пересечения. Предположим, что  $x > 1$ . Тогда  $\angle PAB > \angle PAC$ , т. е. точка  $P$  лежит внутри треугольника  $AA_1C$ . Аналогично точка  $P$  лежит внутри треугольников  $CC_1B$  и  $BB_1A$ . Но единственной общей точкой трех этих треугольников является точка  $O$ . Получено противоречие. Случай  $x < 1$  разбирается аналогично.

**5.5.** Пусть  $d_a$ ,  $d_b$  и  $d_c$  — расстояния от точки  $O$  до сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Тогда  $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$  и  $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ . Если  $h_a - d_a = h_b - d_b = h_c - d_c = x$ , то  $(a + b + c)x = a(h_a - d_a) + b(h_b - d_b) + c(h_c - d_c) = 6S - 2S = 4S$ . Поэтому  $x = 4S/2p = 2r$ .

**5.6.** Докажем, что точка  $O$  является центром вневписанной окружности треугольника  $PBQ$ , касающейся стороны  $PQ$ . В самом деле,  $\angle POQ = \angle A = 90^\circ - \angle B/2$ ; из центра вневписанной окружности отрезок  $PQ$  виден под таким же углом (задача 5.3). Кроме того, точка  $O$  лежит на биссектрисе угла  $B$ . Следовательно, полупериметр треугольника  $PBQ$  равен длине проекции отрезка  $OB$  на прямую  $CB$ .

5.7. Пусть  $P$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ ,  $PQ$  — диаметр вписанной окружности,  $R$  — точка пересечения прямых  $AQ$  и  $BC$ . Так как  $CR=BP$  (см. задачу 19.11, а) и  $M$  — середина стороны  $BC$ , то  $RM=PM$ . Кроме того,  $O$  — середина диаметра  $PQ$ , поэтому  $MO \parallel QR$ , а так как  $AH \parallel PQ$ , то  $AE=OQ$ .

5.8. Данная окружность может быть как вписанной, так и вне-вписанной окружностью треугольника  $ABC$ , отсекаемого касательной от угла. Используя результат задачи 3.2, в обоих случаях легко проверить, что  $uv/w^2 = (p-b)(p-c) \sin B \sin C / h_a^2$ . Остается заметить, что  $h_a = b \sin C = c \sin B$  и  $(p-b)(p-c)/bc = \sin^2(A/2)$  (задача 12.13).

5.9. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки, симметричные точке  $H$  относительно сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Так как  $AB \perp CH$  и  $BC \perp AH$ , то  $\angle(AB, BC) = \angle(CH, HA)$ , а так как треугольник  $AC_1H$  равнобедренный, то  $\angle(CH, HA) = \angle(AC_1, C_1C)$ . Следовательно,  $\angle(AB, BC) = \angle(AC_1, C_1C)$ , т. е. точка  $C_1$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Аналогично доказывается, что точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на этой окружности.

5.10. Пусть  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ . Эта окружность является также описанной окружностью треугольников  $ABP$ ,  $APC$  и  $PBC$ . Ясно, что  $\angle ABP = 180^\circ - \angle ACP = \alpha$ ,  $\angle BAP = \angle BCP = \beta$ ,  $\angle CAP = \angle CBP = \gamma$ . Поэтому  $PX = PB \sin \gamma = 2R \sin \beta \sin \gamma$ ,  $PY = 2R \sin \alpha \sin \gamma$  и  $PZ = 2R \sin \alpha \sin \beta$ . Ясно также, что  $BC = 2R \sin BAC = 2R \sin(\beta + \gamma)$ ,  $AC = 2R \sin(\alpha - \gamma)$ ,  $AB = 2R \sin(\alpha + \beta)$ . Остается проверить равенство  $\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ , что делается простым вычислением.

5.11. а) Пусть  $M$  — точка пересечения прямой  $AI$  с описанной окружностью. Проведя через точку  $I$  диаметр, получим  $AI \cdot IM = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2$ . Так как  $IM = CM$  (задача 2.4, а), то  $R^2 - d^2 = AI \cdot CM$ . Остается заметить, что  $AI = r / \sin(A/2)$  и  $CM = 2R \sin(A/2)$ .

б) Пусть  $M$  — точка пересечения прямой  $AI_a$  с описанной окружностью. Тогда  $AI_a \cdot I_aM = d_a^2 - R^2$ . Так как  $I_aM = CM$  (задача 2.4, а), то  $d_a^2 - R^2 = AI_a \cdot CM$ . Остается заметить, что  $AI_a = r_a / \sin(A/2)$  и  $CM = 2R \sin(A/2)$ .

5.12. а) Так как  $B_1$  — центр описанной окружности треугольника  $AMC$  (см. задачу 2.4, а), то  $AM = 2MB_1 \sin \angle ACM$ . Ясно также, что  $MC = r / \sin \angle ACM$ . Поэтому  $MA \cdot MC / MB_1 = 2r$ .

б) Так как

$$\angle MBC_1 = \angle BMC_1 = 180^\circ - \angle BMC \text{ и } \angle BC_1M = \angle A,$$

то

$$\frac{MC_1}{BC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{MC_1}{BM} = \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle BMC} \cdot \frac{\sin \angle MBC_1}{\sin \angle BC_1M} = \frac{\sin \angle BCM}{\sin A}.$$

Кроме того,  $MB = 2MA_1 \sin BCM$ . Поэтому  $MC_1 \cdot MA_1 / MB = BC/2 \sin A = R$ .

5.13. Пусть  $M$  — середина стороны  $AC$ ,  $N$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ . Тогда  $BN = p - b$  (см. задачу 3.2), поэтому  $BN = AM$ , так как  $p = 3b/2$  по условию. Кроме того,  $\angle OBN = \angle B_1AM$ , а значит,  $\triangle OBN = \triangle B_1AM$ , т. е.  $OB = B_1A$ . Но  $B_1A = B_1O$  (см. задачу 2.4, а).

5.14. Пусть  $O$  и  $O_1$  — центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ . Рассмотрим окружность радиуса  $d = OO_1$  с центром  $O$ . Проведем в этой окружности хорды  $O_1M$  и  $O_1N$ , параллельные сторонам  $AB$  и  $AC$  соответственно. Пусть  $K$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AB$ ,  $L$  — середина стороны  $AB$ . Так как  $OK \perp AB$ ,  $O_1L \perp AB$  и  $O_1M \parallel AB$ , то  $O_1M = 2KL = 2BL - 2BK = c - (a + c - b) = b - a = AE$ . Аналогично  $O_1N = AD$ , а значит,  $\triangle MO_1N = \triangle EAD$ . Следовательно, радиус описанной окружности треугольника  $EAD$  равен  $d$ .

5.15. Пусть вписанная окружность касается стороны  $AC$  в точке  $K$ , а невписанная окружность касается продолжения стороны  $AC$  в точке  $L$ . Тогда  $r = CK$  и  $r_c = CL$ . Остается воспользоваться результатом задачи 3.2.

5.16. Так как  $AB/2 = AM = BM$ , то  $CM = AB/2$  тогда и только тогда, когда точка  $C$  лежит на окружности с диаметром  $AB$ .

5.17. Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Треугольник  $APB$  прямоугольный, поэтому  $PM = AB/2$  и  $\angle MPA = \angle PAM$ , а значит,  $PM \parallel AD$ . Аналогичные рассуждения показывают, что точки  $P$ ,  $M$ ,  $N$  и  $Q$  лежат на одной прямой и  $PQ = PM + MN + NQ = (AB + (BC + AD) + CD)/2$ .

5.18. Пусть  $F$  — точка пересечения прямых  $DE$  и  $BC$ ;  $K$  — середина отрезка  $EC$ . Отрезок  $CD$  является биссектрисой и высотой треугольника  $ECF$ , поэтому  $ED = DF$ , а значит,  $DK \parallel FC$ . Медиана  $DK$  прямоугольного треугольника  $EDC$  в два раза меньше его гипотенузы  $EC$  (задача 5.16), поэтому  $AD = DK = EC/2$ .

5.19. Пусть сумма углов при основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  равна  $90^\circ$ . Обозначим точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$  через  $O$ . Точка  $O$  лежит на прямой, проходящей через середины оснований. Проведем через точку  $C$  прямую  $CK$ , параллельную этой прямой, и прямую  $CE$ , параллельную прямой  $AB$  (точки  $K$  и  $E$  лежат на основании  $AD$ ). Тогда  $CK$  — медиана прямоугольного треугольника  $ECD$ , поэтому  $CK = ED/2 = (AD - BC)/2$  (см. задачу 5.16).

5.20. Ясно, что  $\angle CEB = \angle A + \angle ACE = \angle BCK + \angle KCE = \angle BCE$ .

5.21. Отрезки  $CF$  и  $DK$  являются биссектрисами подобных треугольников  $ACB$  и  $CDB$ , поэтому  $AB : FB = CB : KB$ . Следовательно,  $FK \parallel AC$ . Аналогично доказывается, что  $LF \parallel CB$ . Поэтому  $CLFK$  — прямоугольник, у которого диагональ  $CF$  является биссектрисой угла  $LCK$ , т. е. он квадрат.

**5.22.** Так как  $\frac{\sin ACQ}{AQ} = \frac{\sin AQC}{AC}$ , то  $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - 90^\circ - \varphi)}{a \cos \varphi} = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{a \cos \varphi}$ , где  $a$  — сторона квадрата  $ABPQ$ ,

$\varphi = \angle CAB$ . Поэтому  $\operatorname{ctg} \alpha = 1 + \operatorname{tg} \varphi$ . Аналогично  $\operatorname{ctg} \gamma = 1 + \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = 1 + \operatorname{ctg} \varphi$ . Следовательно,  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \varphi} = 1$ , а значит,  $\cos \alpha \cos \gamma = \cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha = \sin(\alpha + \gamma) = \cos \beta$ .

**5.23.** По теореме Пифагора  $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (AM^2 - PM^2) + (BM^2 - QM^2) + (CM^2 - RM^2)$  и  $PB^2 + QC^2 + RA^2 = (BM^2 - PM^2) + (CM^2 - QM^2) + (AM^2 - RM^2)$ . Эти выражения равны.

Так как  $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = (a - PB)^2 + (a - QC)^2 + (a - RA)^2 = 3a^2 - 2a(PB + QC + RA) + PB^2 + QC^2 + RA^2$ , где  $a = AB$ , то  $PB + QC + RA = 3a/2$ .

**5.24.** Пусть точка  $F$  делит отрезок  $BC$  в отношении  $CF:FB = 1:2$ ;  $P$  и  $Q$  — точки пересечения отрезка  $AF$  с  $BD$  и  $CE$  соответственно. Ясно, что треугольник  $OPQ$  правильный. Используя результат задачи 1.3, легко проверить, что  $AP:PF = 3:4$  и  $AQ:QF = 6:1$ . Следовательно,  $AP:PQ:QF = 3:3:1$ , а значит,  $AP = PQ = OP$ . Поэтому  $\angle AOP = (180^\circ - \angle APO)/2 = 30^\circ$  и  $\angle AOC = \angle AOP + \angle POQ = 90^\circ$ .

**5.25.** Пусть  $A$  и  $B$ ,  $C$  и  $D$ ,  $E$  и  $F$  — точки пересечения окружности со сторонами  $PQ$ ,  $QR$ ,  $RP$  треугольника  $PQR$ . Рассмотрим медиану  $PS$ . Она соединяет середины параллельных хорд  $FA$  и  $DC$  и поэтому перпендикулярна им. Следовательно,  $PS$  является высотой треугольника  $PQR$ , а значит  $PQ = PR$ . Аналогично  $PQ = QR$ .

**5.26.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$ . По условию  $A_1H \cdot BH = B_1H \cdot AH$ . С другой стороны, так как точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ , то  $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$ . Следовательно,  $AH = BH$  и  $A_1H = B_1H$ , а значит,  $AC = BC$ . Аналогично  $BC = AC$ .

**5.27.** а) Предположим, что треугольник  $ABC$  неправильный; например  $a \neq b$ . Так как  $a + h_a = a + b \sin \gamma$  и  $b + h_b = b + a \sin \gamma$ , то  $(a - b)(1 - \sin \gamma) = 0$ . Поэтому  $\sin \gamma = 0$ , т. е.  $\gamma = 90^\circ$ . Но тогда  $a \neq c$ , и аналогичные рассуждения показывают, что  $\beta = 90^\circ$ . Получено противоречие.

б) Обозначим сторону квадрата, две вершины которого лежат на стороне  $BC$ , через  $x$ . Из подобия треугольников  $ABC$  и  $APQ$ , где  $P$  и  $Q$  — вершины квадрата, лежащие на  $AB$  и  $AC$ , получаем  $\frac{x}{a} = \frac{h_a - x}{h_a}$ , т. е.  $x = \frac{ah_a}{a + h_a} = \frac{2S}{a + h_a}$ . Аналогичные рассуждения для других квадратов показывают, что  $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ .

**5.28.** Если  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника  $ABC$ , то углы треугольника  $A_1B_1C_1$  равны  $(\beta + \gamma)/2$ ,  $(\gamma + \alpha)/2$  и  $(\alpha + \beta)/2$ . Пусть для определенности  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ . Тогда  $(\alpha + \beta)/2 \geq (\alpha + \gamma)/2 \geq (\beta + \gamma)/2$ . Следовательно,  $\alpha = (\alpha + \beta)/2$  и  $\gamma = (\beta + \gamma)/2$ , т. е.  $\alpha = \beta$  и  $\beta = \gamma$ .

**5.29.** В любом треугольнике высота больше диаметра вписанной окружности. Поэтому длины высот — целые числа, большие 2, т. е. все они не меньше 3. Пусть  $S$  — площадь треугольника,  $a$  — наибольшая его сторона,  $h$  — соответствующая высота.

Предположим, что треугольник неправильный. Тогда его периметр  $P$  меньше  $3a$ . Поэтому  $3a > P = Pr = 2S = ha$ , т. е.  $h < 3$ . Получено противоречие.

**5.30.** Так как внешний угол при вершине  $A$  треугольника  $ABA_1$  равен  $120^\circ$  и  $\angle A_1AB_1 = 60^\circ$ , то  $AB_1$  — биссектриса этого внешнего угла. Кроме того,  $BB_1$  — биссектриса внутреннего угла при вершине  $B$ , поэтому  $A_1B_1$  — биссектриса угла  $AA_1C$ . Аналогично  $A_1C_1$  — биссектриса угла  $AA_1B$ . Поэтому  $\angle B_1A_1C_1 = (\angle AA_1C + \angle AA_1B)/2 = 90^\circ$ .

**5.31.** Согласно решению предыдущей задачи луч  $A_1C_1$  является биссектрисой угла  $AA_1B$ . Пусть  $K$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $A_1AB$ . Тогда  $\angle C_1KO = \angle A_1KB = 90^\circ + \angle A/2 = 120^\circ$ . Поэтому  $\angle C_1KO + \angle C_1AO = 180^\circ$ , т. е. четырехугольник  $AOKC_1$  вписанный. Следовательно,  $\angle A_1C_1O = \angle KC_1O = \angle KAO = 30^\circ$ .

**5.32.** а) Пусть  $S$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ ,  $S_1$  — окружность, симметричная  $S$  относительно прямой  $BC$ . Ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  лежит на окружности  $S_1$  (задача 5.9), поэтому достаточно проверить, что центр  $O$  окружности  $S$  тоже принадлежит  $S_1$  и биссектриса внешнего угла  $A$  проходит через центр окружности  $S_1$ . Тогда  $POAH$  — ромб, так как  $PO \parallel HA$ .

Пусть  $PQ$  — диаметр окружности  $S$ , перпендикулярный прямой  $BC$ , причем точки  $P$  и  $A$  лежат по одну сторону от прямой  $BC$ . Тогда  $AQ$  — биссектриса угла  $A$ , а  $AP$  — биссектриса внешнего угла  $A$ . Так как  $\angle BPC = 120^\circ = \angle BOC$ , то точка  $P$  является центром окружности  $S_1$ , а точка  $O$  принадлежит окружности  $S_1$ .

б) Пусть  $S$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ ,  $Q$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BAC$  с окружностью  $S$ . Легко проверить, что  $Q$  — центр окружности  $S_1$ , симметричной окружности  $S$  относительно прямой  $BC$ . Кроме того, точки  $O$  и  $H$  лежат на окружности  $S_1$ , а так как  $\angle BIC = 120^\circ$  и  $\angle BI_aC = 60^\circ$  (см. задачу 5.3), то  $I_a$  — диаметр окружности  $S_1$ . Ясно также, что  $\angle OQI = \angle QAH = \angle AQH$ , так как  $OQ \parallel AH$  и  $HA = QO = QH$ . Поэтому точки  $O$  и  $H$  симметричны относительно прямой  $I_a$ .

**5.33.** Построим внешним образом на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  правильный треугольник  $AB_1C$ . Так как  $\angle A = 120^\circ$ , точка  $A$  лежит на отрезке  $BB_1$ . Поэтому  $BB_1 = b + c$  и, кроме того,  $BC = a$  и  $B_1C = b$ , т. е. треугольник  $BB_1C$  искомым.

**5.34.** а) Пусть  $M_1$  и  $N_1$  — середины отрезков  $BH$  и  $CH$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты. Прямоугольные треугольники  $ABB_1$  и  $BHC_1$  имеют общий острый угол при вершине  $B$ , поэтому  $\angle C_1HB = \angle A = 60^\circ$ . Так как треугольник  $BMH$  равнобедренный,  $\angle BHM = \angle HBM = 30^\circ$ . Следовательно,  $\angle C_1HM = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle BHM$ , т. е. точка  $M$  лежит



на биссектрисе угла  $C_1NB$ . Аналогично точка  $N$  лежит на биссектрисе угла  $B_1NC$ .

б) Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи, и пусть, кроме того,  $B'$  и  $C'$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$ . Так как  $AC_1 = AC \cos A = AC/2$ , то  $C_1C' = |AB - AC|/2$ . Аналогично  $B_1B' = |AB - AC|/2$ , т. е.  $B_1B' = C_1C'$ . Следовательно, параллельные прямые  $BB_1$  и  $B'O$ ,  $CC_1$  и  $C'O$  образуют не просто параллелограмм, а ромб. Поэтому его диагональ  $HO$  является биссектрисой угла при вершине  $H$ .

5.35. Так как  $\angle BB_1C = \angle B_1BA + \angle B_1AB > \angle B_1BA = \angle B_1BC$ , то  $BC > B_1C$ . Поэтому точка  $K$ , симметричная  $B_1$  относительно биссектрисы  $CC_1$ , лежит на стороне  $BC$ , а не на ее продолжении. Так как  $\angle CC_1B = 30^\circ$ , то  $\angle B_1C_1K = 60^\circ$ , а значит, треугольник  $B_1C_1K$  правильный. В треугольниках  $BC_1B_1$  и  $BKB_1$  сторона  $BB_1$  общая, стороны  $C_1B_1$  и  $KB_1$  равны, равны также и углы  $C_1BB_1$  и  $KBB_1$ , но это углы не между равными сторонами. Поэтому возможны два случая:

1.  $\triangle BC_1B_1 = \triangle BKB_1$ . Тогда  $\angle BB_1C_1 = \angle BB_1K = 60^\circ/2 = 30^\circ$ . Следовательно, если  $O$  — точка пересечения биссектрис  $BB_1$  и  $CC_1$ , то  $\angle BOC = \angle B_1OC_1 = 180^\circ - \angle OC_1B_1 - \angle OB_1C_1 = 120^\circ$ . С другой стороны,  $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$  (см. задачу 5.3), т. е.  $\angle A = 60^\circ$ .

2.  $\angle BC_1B_1 + \angle BKB_1 = 180^\circ$ . Тогда четырехугольник  $BC_1B_1K$  вписанный, а так как треугольник  $B_1C_1K$  правильный, то  $\angle B = 180^\circ - \angle C_1B_1K = 120^\circ$ .

5.36. Пусть  $BM$  — медиана,  $AK$  — биссектриса треугольника  $ABC$  и  $BM \perp AK$ . Прямая  $AK$  является биссектрисой и высотой треугольника  $ABM$ , поэтому  $AM = AB$ , т. е.  $AC = 2AM = 2AB$ . Следовательно,  $AB = 2$ ,  $BC = 3$  и  $AC = 4$ .

5.37. Пусть  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза данного треугольника. Если числа  $a$  и  $b$  нечетные, то  $a^2 + b^2$  при делении на 4 дает остаток 2 и не может быть квадратом целого числа. Поэтому одно из чисел  $a$  и  $b$  четное, а другое нечетное; пусть для определенности  $a = 2p$ . Числа  $b$  и  $c$  нечетные, поэтому  $c + b = 2q$  и  $c - b = 2r$ . Следовательно  $4p^2 = a^2 = c^2 - b^2 = 4qr$ . Если бы числа  $q$  и  $r$  имели общий делитель  $d$ , то на  $d$  делились бы числа  $a = 2\sqrt{qr}$ ,  $b = q - r$  и  $c = q + r$ . Поэтому числа  $q$  и  $r$  взаимно просты, а так как  $p^2 = qr$ , то  $q = m^2$  и  $r = n^2$ . В итоге получаем  $a = 2mn$ ,  $b = m^2 - n^2$  и  $c = m^2 + n^2$ .

Легко проверить также, что если  $a = 2mn$ ,  $b = m^2 - n^2$  и  $c = m^2 + n^2$ , то  $a^2 + b^2 = c^2$ .

5.38. Пусть  $p$  — полупериметр треугольника, а  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — длины его сторон. По формуле Герона  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ . С другой стороны,  $S^2 = p^2 r^2 = p^2$ , так как  $r = 1$ . Поэтому  $p = (p-a)(p-b)(p-c)$ . Если ввести неизвестные  $x = p - a$ ,  $y = p - b$ ,  $z = p - c$ , то это уравнение переписывается в виде  $x + y + z = xyz$ . Заметим, что число  $p$  целое или

полуцелое (т. е. число вида  $(2n+1)/2$ , где  $n$  целое), поэтому все числа  $x, y, z$  одновременно целые или полуцелые. Но если они полуцелые, то число  $x+y+z$  полуцелое, а число  $xyz$  имеет вид  $m/8$ , где число  $m$  нечетное. Следовательно, числа  $x, y, z$  целые. Пусть для определенности  $x \leq y \leq z$ . Тогда  $xyz = x+y+z \leq 3z$ , т. е.  $xy \leq 3$ . Возможны три случая.

1.  $x=1, y=1$ . Тогда  $2+z=z$ , чего не может быть.

2.  $x=1, y=2$ . Тогда  $3+z=2z$ , т. е.  $z=3$ .

3.  $x=1, y=3$ . Тогда  $4+z=3z$ , т. е.  $z=2 < y$ , чего не может быть.

Итак,  $x=1, y=2, z=3$ . Поэтому  $p=x+y+z=6$  и  $a=p-x=5, b=4, c=3$ .

**5.39.** Пусть  $a_1$  и  $b_1, a_2$  и  $b_2$  — катеты двух различных пифагоровых треугольников,  $c_1$  и  $c_2$  — их гипотенузы. Возьмем две перпендикулярные прямые и отложим на них отрезки  $OA=a_1a_2, OB=a_1b_2, OC=b_1b_2$  и  $OD=a_2b_1$  (рис. 57). Так как  $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ , то четырехугольник  $ABCD$  вписанный. Согласно задаче 2.71  $4R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = (c_1c_2)^2$ , т. е.  $R = c_1c_2/2$ . Увеличив, если нужно, четырехугольник  $ABCD$  в два раза, получим искомым четырехугольник.

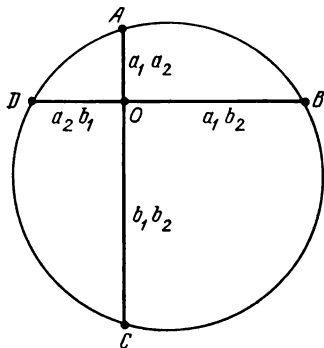


Рис. 57

**5.40.** а) Длины гипотенуз прямоугольных треугольников с катетами 5 и 12, 9 и 12 равны 13 и 15. Приложив равные катеты этих треугольников друг к другу, получим треугольник площади  $12(5+9)/2=84$ .

б) Предположим сначала, что длина наименьшей стороны данного треугольника — четное число, т. е. длины сторон треугольника равны  $2n, 2n+1, 2n+2$ . Тогда по формуле Герона  $16S^2 = (6n+3)(2n+3) \times (2n+1)(2n-1) = 4(3n^2+6n+2)(4n^2-1) + 4n^2 - 1$ . Получено противоречие, так как число, стоящее в правой части, не делится на 4. Следовательно, длины сторон треугольника равны  $2n-1, 2n$  и  $2n+1$ , причем  $S^2 = 3n^2(n^2-1)$ . Поэтому  $S=nk$ , где  $k$  — целое число, и  $k^2 = 3(n^2-1)$ . Ясно также, что  $k$  — длина высоты, опущенной на сторону  $2n$ . Эта высота делит исходный треугольник на два прямоугольных треугольника с общим катетом  $k$  и гипотенузами  $2n+1$  и  $2n-1$ ; квадраты длин других катетов этих треугольников равны  $(2n \pm 1)^2 - k^2 = 4n^2 \pm 4n + 1 - 3n^2 + 3 = (n \pm 2)^2$ .

**5.41.** а) Так как  $AB^2 - AB_1^2 = BB_1^2 = BC^2 - (AC \pm AB_1)^2$ , то  $AB_1 = \pm (AB^2 + AC^2 - BC^2)/2AC$ .

б) Пусть диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажем, например, что число  $q = BO/OD$  рациональное (тогда число

$OD = BD/(q+1)$  тоже рациональное). Проведем в треугольниках  $ABC$  и  $ADC$  высоты  $BB_1$  и  $DD_1$ . Согласно задаче а) числа  $AB_1$  и  $CD_1$  рациональные, а значит, число  $B_1D_1$  тоже рациональное. Пусть  $E$  — точка пересечения прямой  $BB_1$  и прямой, проходящей через точку  $D$  параллельно  $AC$ . В прямоугольном треугольнике  $BDE$  катет  $ED = B_1D_1$  и гипотенуза  $BD$  — рациональные числа, поэтому число  $BE^2$  тоже рациональное. Из треугольников  $ABB_1$  и  $CDD_1$  получаем, что числа  $BB_1^2$  и  $DD_1^2$  рациональны. А так как  $BE^2 = (BB_1 + DD_1)^2 = BB_1^2 + DD_1^2 + 2BB_1 \cdot DD_1$ , то число  $BB_1 \cdot DD_1$  рациональное. Следовательно, число  $BO/OD = BB_1/DD_1 = BB_1 \cdot DD_1/DD_1^2$  рациональное.

**5.42.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  не может быть двух пар соответственных углов, составляющих в сумме  $180^\circ$ , так как иначе их сумма равна  $360^\circ$  и третьи углы треугольников должны быть нулевыми. Предположим теперь, что углы первого треугольника равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , а углы второго равны  $180^\circ - \alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Сумма углов двух треугольников равна  $360^\circ$ , поэтому  $180^\circ + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ , т. е.  $\beta + \gamma = 90^\circ$ . Следовательно,  $\alpha = 90^\circ = 180^\circ - \alpha$ .

**5.43.** Ясно, что  $\overline{A_1C} = \overline{BO}$  и  $\overline{CB_1} = \overline{OA}$ , поэтому  $\overline{A_1B_1} = \overline{BA}$ . Аналогично  $\overline{B_1C_1} = \overline{CB}$  и  $\overline{C_1A_1} = \overline{AC}$ , т. е.  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Кроме того,  $ABA_1B_1$  и  $ACA_1C_1$  — параллелограммы. Значит, отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  проходят через середину отрезка  $AA_1$ .

**5.44.** Так как  $\angle MAO = \angle PAO = \angle AOM$ , то  $AMOP$  — ромб. Аналогично  $BNOQ$  — ромб. Следовательно,  $MN = MO + ON = AM + BN$  и  $OP + PQ + QO = AP + PQ + QB = AB$ .

**5.45.** а) Проведем через вершины треугольника  $ABC$  прямые, параллельные его противоположным сторонам. В результате получим треугольник  $A_1B_1C_1$ , серединами сторон которого являются точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Высоты треугольника  $ABC$  являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника  $A_1B_1C_1$ , поэтому центр описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$  является точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ .

б) Точка  $H$  является центром описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ , поэтому  $4R^2 = B_1H^2 = B_1A^2 + AH^2 = BC^2 + AH^2$ . Следовательно,  $AH^2 = 4R^2 - BC^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right) BC^2 = (BC \operatorname{ctg} \alpha)^2$ .

**5.46.** Пусть  $AD$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AB$  и углом  $36^\circ$  при вершине  $C$ . Тогда треугольник  $ACD$  равнобедренный и  $\triangle ABC \sim \triangle BDA$ . Поэтому  $CD = AD = AB = 2xBC$  и  $DB = 2xAB = 4x^2BC$ , а значит,  $BC = CD + DB = (2x + 4x^2)BC$ .

**5.47.** Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — проекции точки  $A$  на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине  $B$ ;  $M$  — середина стороны

*AB*. Так как биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны, то  $AB_1BB_2$  — прямоугольник, и его диагональ  $B_1B_2$  проходит через точку  $M$ . Кроме того,  $\angle B_1MB = 180^\circ - 2\angle MBB_1 = 180^\circ - \angle B$ . Следовательно,  $B_1B_2 \parallel BC$ , а значит, прямая  $B_1B_2$  совпадает с прямой  $l$ , соединяющей середины сторон  $AB$  и  $AC$ . Аналогично доказывается, что проекции точки  $A$  на биссектрисы углов при вершине  $C$  лежат на прямой  $l$ .

5.48. Предположим, что биссектрисы углов  $A$  и  $B$  равны, но  $a > b$ . Тогда  $\cos \frac{A}{2} < \cos \frac{B}{2}$  и  $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$ , т. е.  $\frac{bc}{b+c} < \frac{ac}{a+c}$ . Перемножая

полученные неравенства, приходим к противоречию, так как  $l_a = 2bc \cos(A/2)/(b+c)$  и  $l_b = 2ac \cos(B/2)/(a+c)$  (см. задачу 4.47).

5.49. а) Согласно задаче 4.47 длина биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$  равна  $2ac \cos(B/2)/(a+c)$ , поэтому достаточно проверить, что система уравнений  $ac/(a+c) = p$ ,  $a^2 + c^2 - 2ac \cos B = q$  имеет (с точностью до перестановки чисел  $a$  и  $c$ ) единственное положительное решение. Пусть  $a+c=u$ . Тогда  $ac=pu$  и  $q=u^2 - 2pu(1+\cos \beta)$ . Произведение корней этого квадратного уравнения относительно  $u$  равно  $-q$ , поэтому оно имеет единственный положительный корень. Ясно, что система уравнений  $a+c=u$ ,  $ac=pu$  имеет единственное решение.

б) В треугольниках  $AA_1B$  и  $CC_1B$  равны стороны  $AA_1$  и  $CC_1$ , углы при вершине  $B$  и биссектрисы углов при вершине  $B$ . Следовательно, эти треугольники равны, а значит,  $AB=BC$  или  $AB=BC_1$ . Второе равенство выполняться не может.

5.50. Пусть точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $AC$ . Если  $r_1$  — радиус окружности с центром на отрезке  $MN$ , касающейся сторон  $AB$  и  $AC$ , то  $S_{AMN} = qr_1$ , где  $q = (AM + AN)/2$ . Прямая  $MN$  проходит через центр вписанной окружности тогда и только тогда, когда  $r_1 = r$ , т. е.  $S_{AMN}/q = S_{ABC}/p = S_{BCNM}/(p-q)$ .

5.51. а) Возьмем на продолжении отрезка  $AC$  за точку  $C$  такую точку  $B'$ , что  $CB' = CB$ . Треугольник  $BCB'$  равнобедренный, поэтому  $\angle AEB = \angle ACB = 2\angle CBB'$ , а значит,  $E$  — центр описанной окружности треугольника  $ABB'$ . Следовательно, точка  $F$  делит отрезок  $AB'$  пополам; поэтому прямая  $C_1F$  делит пополам периметр треугольника  $ABC$ .

б) Легко проверить, что прямая, проведенная через точку  $C$  параллельно  $BB'$ , является биссектрисой угла  $ACB$ . А так как  $C_1F \parallel BB'$ , то прямая  $C_1F$  — биссектриса угла треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника  $ABC$ . Биссектрисы этого треугольника пересекаются в одной точке.

5.52. Пусть  $X$  — точка пересечения прямых  $AD_2$  и  $CD_1$ ;  $M$ ,  $E_1$  и  $E_2$  — проекции точек  $X$ ,  $D_1$  и  $D_2$  на прямую  $AC$ . Тогда  $CE_2 = CD_2 \sin \gamma = a \sin \gamma$  и  $AE_1 = c \sin \alpha$ . Так как  $a \sin \gamma = c \sin \alpha$ , то

$CE_2 = AE_1 = q$ . Поэтому

$$\frac{XM}{AM} = \frac{D_2 E_2}{AE_2} = \frac{a \cos \gamma}{b+q} \quad \text{и} \quad \frac{XM}{CM} = \frac{c \cos \alpha}{b+q}.$$

Следовательно,  $AM:CM = c \cos \alpha : a \cos \gamma$ . Высота  $BH$  делит сторону  $AC$  в таком же отношении.

**5.53.** а) По теореме косинусов  $B_1 C_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$ , т. е.  $a_1^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + bc \sin \alpha = \frac{b^2 + c^2}{2} + 2S$ . Записывая аналогичные равенства для  $b_1^2$  и  $c_1^2$  и складывая их, получаем требуемое.

б) Для остроугольного треугольника  $ABC$ , прибавив к  $S$  площади треугольников  $ABC_1$ ,  $AB_1 C$  и  $A_1 BC$  и прибавив к  $S_1$  площади треугольников  $AB_1 C_1$ ,  $A_1 BC_1$  и  $A_1 B_1 C$ , получим одинаковые величины (для треугольника с тупым углом  $A$  площадь треугольника  $AB_1 C_1$  следует взять со знаком минус). Поэтому  $S_1 = S + (a^2 + b^2 + c^2)/4 - (ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha)/4$ . Остается заметить, что  $ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ac \cos \beta = 2S(\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = (a^2 + b^2 + c^2)/2$  (см. задачу 12.44, а)).

**5.54.** Докажем сначала, что точка  $B'$  лежит на описанной окружности треугольника  $AHC$ , где  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .  $\angle(AB', B'C) = \angle(AA_1, CC_1) = \angle(AA_1, BC) + \angle(BC, AB) + \angle(AB, CC_1) = \angle(BC, AB)$ . Но, как следует из решения задачи 5.9,  $\angle(BC, AB) = \angle(AH, HC)$ , поэтому точки  $A, B', H$  и  $C$  лежат на одной окружности, причем эта окружность симметрична описанной окружности треугольника  $ABC$  относительно прямой  $AC$ . Следовательно, обе эти окружности имеют радиус  $R$ , а значит,  $B'H = 2R \sin B'AH = 2R \cos \alpha$ . Аналогично  $A'H = 2R \cos \alpha = C'H$ . Решение задачи а) тем самым завершено, а для решения задачи б) остается заметить, что  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ , так как после поворота треугольника  $A'B'C'$  на угол  $\alpha$  его стороны будут параллельны сторонам треугольника  $ABC$ .

**5.55.** Пусть  $a_1 = BA_1$ ,  $a_2 = A_1 C$ ,  $b_1 = CB_1$ ,  $b_2 = B_1 A$ ,  $c_1 = AC_1$  и  $c_2 = C_1 B$ . Произведения длин отрезков секущих, проходящих через одну точку, равны, поэтому  $a_1(a_1 + x) = c_2(c_2 - z)$ , т. е.  $a_1 x + c_2 z = c_2^2 - a_1^2$ . Аналогично получаем для  $x$ ,  $y$  и  $z$  еще два уравнения:  $b_1 y + a_2 x = a_2^2 - b_1^2$  и  $c_1 z + b_2 y = b_2^2 - c_1^2$ . Домножим первое уравнение на  $b^{2n}$ , а второе и третье на  $c^{2n}$  и  $a^{2n}$  и сложим полученные уравнения. Так как, например,  $c_2 b^n - c_1 a^n = 0$  по условию, то в правой части получим нуль. В левой части, например, коэффициент при  $x$  равен  $a_1 b^{2n} + a_2 c^{2n} = (ac^n b^{2n} + ab^n c^{2n})/(b^n + c^n) = ab^n c^n$ . Поэтому  $ab^n c^n x + ba^n c^n y + ca^n b^n z = 0$ . Поделив обе части равенства на  $(abc)^n$ , получим требуемое.

**5.56.** Пусть в исходном треугольнике  $\angle A = 3\alpha$ ,  $\angle B = 3\beta$  и  $\angle C = 3\gamma$ . Возьмем равносторонний треугольник  $A_2 B_2 C_2$  и построим на его

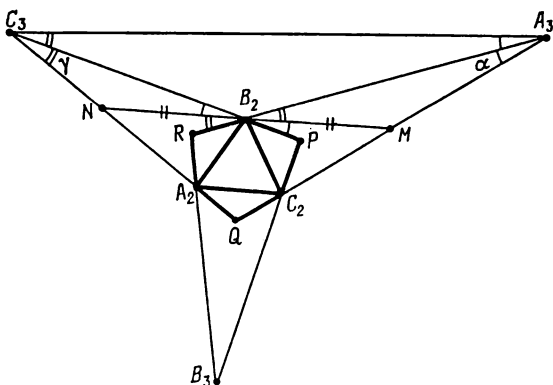


Рис. 58

сторонах как на основаниях равнобедренные треугольники  $A_2B_2R$ ,  $B_2C_2P$  и  $C_2A_2Q$  с углами при основаниях  $60^\circ - \gamma$ ,  $60^\circ - \alpha$ ,  $60^\circ - \beta$  соответственно (рис. 58). Продолжим боковые стороны этих треугольников за точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  и обозначим точку пересечения продолжений сторон  $RB_2$  и  $QC_2$  через  $A_3$ ,  $PC_2$  и  $RA_2$  через  $B_3$ ,  $QA_2$  и  $PB_2$  через  $C_3$ . Проведем через  $B_2$  прямую, параллельную  $A_2C_2$ , и обозначим через  $M$  и  $N$  точки ее пересечения с прямыми  $QA_3$  и  $QC_3$ . Ясно, что  $B_2$  — середина отрезка  $NM$ . Вычислим углы треугольников  $B_2C_3N$  и  $B_2A_3M$ :  $\angle C_3B_2N = \angle PB_2M = \angle C_2B_2M - \angle C_2B_2P = \alpha$ ;  $\angle B_2NC_3 = 180^\circ - \angle C_2A_2Q = 120^\circ + \beta$ , значит,  $\angle B_2C_3N = 180^\circ - \alpha - (120^\circ + \beta) = \gamma$ . Аналогично  $\angle A_3B_2M = \gamma$  и  $\angle B_2A_3M = \alpha$ . Следовательно,  $\triangle B_2C_3N \sim \triangle A_3B_2M$ . Значит,  $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : B_2M$ , а так как  $B_2M = B_2N$  и  $\angle C_3B_2A_3 = \angle C_3NB_2$ , то  $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : NB_2$  и  $\triangle C_3B_2A_3 \sim \triangle C_3NB_2$ , следовательно,  $\angle B_2C_3A_3 = \gamma$ . Аналогично  $\angle A_2C_3B_3 = \gamma$ , а значит,  $\angle A_3C_3B_3 = 3\gamma = \angle C$  и  $C_3B_2$ ,  $C_3A_2$  — триссектрисы угла  $C_3$  треугольника  $A_3B_3C_3$ . Аналогичные рассуждения для вершин  $A_3$  и  $B_3$  показывают, что  $\triangle ABC \sim \triangle A_3B_3C_3$ , а точки пересечения триссектрис треугольника  $A_3B_3C_3$  образуют правильный треугольник  $A_2B_2C_2$ .

5.57. Точка  $A_1$  лежит на биссектрисе угла  $BAC$ , поэтому точка  $A$  лежит на продолжении биссектрисы угла  $B_2A_1C_2$ . Кроме того,  $\angle B_2AC_2 = \alpha = (180^\circ - \angle B_2A_1C_2)/2$ . Поэтому  $A$  — центр вневписанной окружности треугольника  $B_2A_1C_2$  (см. задачу 5.3). Пусть  $D$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CB_2$ . Тогда  $\angle AB_2C_2 = \angle AB_2D = 180^\circ - \angle B_2AD - \angle ADB_2 = 180^\circ - \gamma - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ + \beta$ . А так как  $\angle AB_2C = 180^\circ - (\alpha + \beta) - (\beta + \gamma) = 120^\circ - \beta$ , то  $\angle CB_2C_2 = \angle AB_2C - \angle AB_2C_2 = 60^\circ - 2\beta$ . Аналогично  $\angle AB_2A_2 = 60^\circ - 2\beta$ . Поэтому  $\angle A_2B_2C_2 = \angle AB_2C - \angle AB_2A_2 - \angle CB_2C_2 = 3\beta$ . Аналогично  $\angle B_2A_2C_2 = 3\alpha$  и  $\angle A_2C_2B_2 = 3\gamma$ .

5.58. Пусть при проекции на прямую, перпендикулярную прямой  $A_1B_1$ , точки  $A, B$  и  $C$  переходят в  $A', B'$  и  $C'$ , точка  $C_1$  — в  $Q$ , а две точки  $A_1$  и  $B_1$  — в одну точку  $P$ . Так как  $\overline{A_1B} : \overline{A_1C} = \overline{PB'} : \overline{PC'}$ ,  $\overline{B_1C} : \overline{B_1A} = \overline{PC'} : \overline{PA'}$  и  $\overline{C_1A} : \overline{C_1B} = \overline{QA'} : \overline{QB'}$ , то  $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} =$

$$= \frac{\overline{PB'}}{\overline{PC'}} \cdot \frac{\overline{PC'}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}} \cdot \frac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}} = \frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'+x}{b'+x}, \quad \text{где } |x| = PQ. \quad \text{Равенство}$$

$$\frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'+x}{b'+x} = 1 \text{ эквивалентно тому, что } x=0 \text{ (нужно учесть, что } a' \neq b',$$

так как  $A' \neq B'$ ). А равенство  $x=0$  означает, что  $P=Q$ , т. е. точка  $C_1$  лежит на прямой  $A_1B_1$ .

5.59. Пусть точка  $P$  лежит на дуге  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда  $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} = -\frac{BP \cos PBC}{CP \cos PCB}$ ,  $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = -\frac{CP \cos PCA}{AP \cos PAC}$

и  $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = -\frac{AP \cos PAB}{PB \cos PBA}$ . Перемножая эти равенства и учитывая, что

$\angle PAC = \angle PBC$ ,  $\angle PAB = \angle PCB$  и  $\angle PCA + \angle PBA = 180^\circ$ , получаем

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1.$$

5.60. Пусть  $O, O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей  $S, S_1$  и  $S_2$ ;  $X$  — точка пересечения прямых  $O_1O_2$  и  $A_1A_2$ . Применяя теорему Менелая к треугольнику  $OO_1O_2$  и точкам  $A_1, A_2$  и  $X$ , получаем  $\frac{O_1X}{O_2X} \cdot \frac{O_2A_2}{OA_2} \cdot \frac{OA_1}{O_1A_1} = 1$ , а значит,  $O_1X : O_2X = R_1 : R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Следовательно,  $X$  — точка пересечения общих внешних или общих внутренних касательных к окружностям  $S_1$  и  $S_2$ .

5.61. а) Пусть для определенности  $\angle B < \angle C$ . Тогда  $\angle DAE = \angle ADE = \angle B + \angle A/2$ , а значит,  $\angle CAE = \angle B$ . Так как

$$\frac{BE}{AB} = \frac{\sin BAE}{\sin AEB} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{CE} = \frac{\sin AEC}{\sin CAE},$$

то

$$\frac{BE}{CE} = \frac{c \sin BAE}{b \sin CAE} = \frac{c \sin(A+B)}{b \sin B} = \frac{c \sin C}{b \sin B} = \frac{c^2}{b^2}.$$

б) В задаче а) точка  $E$  лежит на продолжении стороны  $BC$ , так как  $\angle ADC = \angle BAD + \angle B > \angle CAD$ . Поэтому, используя результат задачи а) и теорему Менелая, получаем требуемое.

5.62. Так как  $\angle BCE = 90^\circ - \angle B/2$ , то  $\angle BCE = \angle BEC$ , а значит,  $BE = BC$ . Поэтому  $CF : KF = BE : BK = BC : BK$  и  $AE : KE = CA : CK =$

$= BC: BK$ . Пусть прямая  $EF$  пересекает  $AC$  в точке  $D$ . По теореме Менелая  $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CF}{KF} \cdot \frac{KE}{AE} = 1$ . Учитывая, что  $CF:KF = AE:KE$ , получаем требуемое.

**5.63.** Доказательство аналогично решению задачи 5.79; нужно только рассмотреть отношение ориентированных отрезков и углов.

**5.64.** Пусть  $A_2, B_2, C_2$  — точки пересечения прямых  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$ ,  $AB$  и  $A_1B_1$ . Применим теорему Менелая к следующим треугольникам и точкам на их сторонах:  $OAB$  и  $(A_1, B_1, C_2)$ ,  $OBC$  и  $(B_1, C_1, A_2)$ ,  $OAC$  и  $(A_1, C_1, B_2)$ . Тогда

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} = 1, \quad \frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB_1}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1,$$

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC_1}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1.$$

Из теоремы Менелая следует, что точки  $A_2, B_2, C_2$  лежат на одной прямой.

**5.65.** Рассмотрим треугольник  $A_0B_0C_0$ , образованный прямыми  $A_1B_2, B_1C_2$  и  $C_1A_2$  ( $A_0$  — точка пересечения прямых  $A_1B_2$  и  $A_2C_1$  и т. д.), и применим для него теорему Менелая к следующим пяти тройкам точек:  $(A, B_2, C_1)$ ,  $(B, C_2, A_1)$ ,  $(C, A_2, B_1)$ ,  $(A_1, B_1, C_1)$  и  $(A_2, B_2, C_2)$ . В результате получим

$$\frac{\overline{B_0A}}{\overline{C_0A}} \cdot \frac{\overline{A_0B_2}}{\overline{B_0B_2}} \cdot \frac{\overline{C_0C_1}}{\overline{A_0C_1}} = 1, \quad \frac{\overline{C_0B}}{\overline{A_0B}} \cdot \frac{\overline{B_0C_2}}{\overline{C_0C_2}} \cdot \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{B_0A_1}} = 1,$$

$$\frac{\overline{A_0C}}{\overline{B_0C}} \cdot \frac{\overline{C_0A_2}}{\overline{A_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{C_0B_1}} = 1, \quad \frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{A_0A_1}} \cdot \frac{\overline{C_0B_1}}{\overline{B_0B_1}} \cdot \frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{C_0C_1}} = 1,$$

$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{C_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_0B_2}}{\overline{A_0B_2}} \cdot \frac{\overline{C_0C_2}}{\overline{B_0C_2}} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем  $\frac{\overline{B_0A}}{\overline{C_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0B}}{\overline{A_0B}} \cdot \frac{\overline{A_0C}}{\overline{B_0C}} = 1$ , а значит, точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой.

**5.66.** Пусть  $N$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $KQ$ ,  $P'$  — точка пересечения прямых  $KL$  и  $MN$ . Применяя теорему Дезарга к треугольникам  $KBL$  и  $NDM$ , получаем, что точки  $P', A$  и  $C$  лежат на одной прямой. Значит,  $P' = P$ .



5.67. Достаточно применить теорему Дезарга к треугольникам  $AED$  и  $BFC$  и теорему Паппа к тройкам точек  $(B, E, C)$  и  $(A, F, D)$ .

5.68. а) Пусть  $R$  — точка пересечения прямых  $KL$  и  $MN$ . Применяя теорему Паппа к тройкам точек  $(P, L, N)$  и  $(Q, M, K)$ , получаем, что точки  $A, C$  и  $R$  лежат на одной прямой.

б) Применяя теорему Дезарга к треугольникам  $NDM$  и  $LBK$ , получаем, что точки пересечения прямых  $ND$  и  $LB$ ,  $DM$  и  $BK$ ,  $NM$  и  $LK$  лежат на одной прямой.

5.69. Воспользуемся результатом задачи 5.68, а). В качестве точек  $P$  и  $Q$  возьмем точки  $P_2$  и  $P_4$ , в качестве  $A$  и  $C$  — точки  $C_1$  и  $P_1$ , в качестве  $K, L, M$  и  $N$  — точки  $P_5, A_1, B_1$  и  $P_3$ . В итоге получим, что прямая  $P_6C_1$  проходит через точку  $P_1$ .

5.70. а) Эта задача является переформулировкой задачи 5.58, так как число  $\overline{BA_1} : \overline{CA_1}$  имеет знак минус, если точка  $A_1$  лежит на отрезке  $BC$ , и знак плюс, если она лежит вне отрезка  $BC$ .

б) Предположим сначала, что прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $M$ . Любые три вектора плоскости линейно зависимы, т. е. существуют такие числа  $\lambda, \mu$  и  $\nu$  (не все равные нулю), что  $\lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BM} + \nu \overrightarrow{CM} = 0$ . Рассмотрим проекцию на прямую  $BC$  параллельно прямой  $AM$ . При этой проекции точки  $A$  и  $M$  переходят в  $A_1$ , а точки  $B$  и  $C$  переходят сами в себя. Поэтому  $\mu \overline{BA_1} + \nu \overline{CA_1} = 0$ , т. е.  $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = -\nu : \mu$ . Аналогично  $\overline{CB_1} : \overline{AB_1} = -\lambda : \nu$  и  $\overline{AC_1} : \overline{BC_1} = -\mu : \lambda$ . Перемножая эти равенства, получаем требуемое. В случае, когда прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  параллельны, для доказательства достаточно заметить, что  $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = \overline{BA} : \overline{CA}$  и  $\overline{CB_1} : \overline{AB_1} = \overline{CB} : \overline{AB}$ .

Предположим теперь, что выполняется указанное соотношение, и докажем, что тогда прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Пусть  $C_1^*$  — точка пересечения прямой  $AB$  с прямой, проходящей через точку  $C$  и точку пересечения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ . Для точки  $C_1^*$  выполняется такое же соотношение, как и для точки  $C_1$ . Поэтому  $\overline{C_1^*A} : \overline{C_1^*B} = \overline{C_1A} : \overline{C_1B}$ . Следовательно,  $C_1^* = C_1$ , т. е. прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

Можно проверить также, что если выполняется указанное соотношение и две из прямых  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  параллельны, то третья прямая им параллельна.

5.71. Ясно, что  $AB_1 = AC_1$ ,  $BA_1 = BC_1$  и  $CA_1 = CB_1$ , причем в случае вписанной окружности на сторонах треугольника  $ABC$  лежат три точки, а в случае невписанной — одна точка. Остается воспользоваться теоремой Чевы.

5.72. Пусть  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ . Тогда

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{b \cos A}{a \cos B} \cdot \frac{c \cos B}{b \cos C} \cdot \frac{a \cos C}{c \cos A} = 1.$$

5.73. Пусть  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Рассматриваемые прямые проходят через вершины треугольника  $A_2B_2C_2$ , причем в задаче а) они делят его стороны в таких же отношениях, в каких прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  делят стороны треугольника  $ABC$ , а в задаче б) они делят их в обратных отношениях. Остается воспользоваться теоремой Чебы.

5.74. Так как  $\triangle AC_1B_2 \sim \triangle BC_1A_1$  и  $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle CB_1A_1$ , то  $AB_2 \cdot C_1B = AC_1 \cdot BA_1$  и  $AC_2 \cdot CB_1 = A_1C \cdot B_1A$ . Поэтому

$$\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

5.75. Пусть прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекают прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ .

а) Если  $\angle B + \beta < 180^\circ$  и  $\angle C + \gamma < 180^\circ$ , то  $\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{AB \cdot BA_1 \sin(B + \beta)}{AC \cdot CA_1 \sin(C + \gamma)} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(B + \beta)}{\sin(C + \gamma)}$ . Последнее выражение равно  $\frac{BA_2}{A_2C}$  во всех случаях. Запишем аналогичные выражения для  $\frac{CB_2}{B_2A}$  и  $\frac{AC_2}{C_2B}$  и перемножим их. Остается воспользоваться теоремой Чебы.

б) Точка  $A_2$  лежит вне отрезка  $BC$ , только если ровно один из углов  $\beta$  и  $\gamma$  больше соответствующего ему угла  $B$  или  $C$ . Поэтому

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(B - \beta)}{\sin(C - \gamma)}.$$

5.76. Легко проверить, что эта задача является частным случаем задачи 5.75.

**Замечание.** Аналогичное утверждение верно и для вневписанной окружности.

5.77. Решение задачи очевидным образом следует из теоремы Чебы.

5.78. Применяя теорему синусов к треугольникам  $ACC_1$  и  $BCC_1$ , получаем  $\frac{AC_1}{C_1C} = \frac{\sin ACC_1}{\sin A}$  и  $\frac{CC_1}{C_1B} = \frac{\sin B}{\sin C_1CB}$ , т. е.  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$ . Аналогично  $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$  и  $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$ . Для завершения доказательства остается перемножить эти равенства.

**Замечание.** Аналогичное утверждение справедливо и для отношений ориентированных отрезков и углов в том случае, когда точки взяты на продолжениях сторон.

**5.79.** Можно считать, что точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  лежат на сторонах треугольника  $ABC$ . Согласно задаче 5.78

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB} \cdot \frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA}.$$

Так как прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  симметричны прямым  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  относительно биссектрис, то  $\angle ACC_2 = \angle C_1CB$ ,  $\angle C_2CB = \angle ACC_1$  и т. д., поэтому

$$\frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB} \cdot \frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC} \cdot \frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA} = \frac{\sin C_1CB}{\sin ACC_1} \cdot \frac{\sin A_1AC}{\sin BAA_1} \cdot \frac{\sin B_1BA}{\sin CBB_1} =$$

$$= \frac{C_1B}{AC_1} \cdot \frac{A_1C}{BA_1} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1.$$

Следовательно,  $\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$ , т. е. прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  пересекаются в одной точке.

**Замечание.** Утверждение остается верным и в том случае, когда точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  взяты на продолжениях сторон, если только точка  $P$  не лежит на описанной окружности  $S$  треугольника  $ABC$ ; если же  $P$  лежит на окружности  $S$ , то прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$  параллельны (см. задачу 2.90).

**5.80.** Пусть диагонали  $AD$  и  $BE$  данного шестиугольника  $ABCDEF$  пересекаются в точке  $P$ ;  $K$  и  $L$  — середины сторон  $AB$  и  $ED$ . Так как  $ABDE$  — трапеция, отрезок  $KL$  проходит через точку  $P$  (задача 19.2). По теореме синусов  $\sin APK : \sin AKP = AK : AP$  и  $\sin BPK : \sin BKP = BK : BP$ . Так как  $\sin AKP = \sin BKP$  и  $AK = BK$ , то  $\sin APK : \sin BPK = BP : AP = BE : AD$ . Аналогичные соотношения можно записать и для отрезков, соединяющих середины двух других пар противоположных сторон. Перемножая эти соотношения и применяя результат задачи 5.78 к треугольнику, образованному прямыми  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ , получаем требуемое.

**5.81.** Рассмотрим гомотегию с центром  $P$  и коэффициентом 2. Так как  $PA_1A_3A_2$  — прямоугольник, то при этой гомотетии прямая  $A_1A_2$  переходит в прямую  $l_a$ , проходящую через точку  $A_3$ , причем прямые  $l_a$  и  $A_3P$  симметричны относительно прямой  $A_3A$ . Прямая  $A_3A$  делит пополам угол  $B_3A_3C_3$  (задача 1.56, а). Аналогично доказывается, что прямые  $l_b$  и  $l_c$  симметричны прямым  $B_3P$  и  $C_3P$  относительно биссектрис треугольника  $A_3B_3C_3$ . Следовательно, прямые  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  пересекаются в одной точке или параллельны (задача 5.79), а значит, в одной точке пересекаются и прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ .

**5.82.** Согласно задачам 5.78 и 5.70, 6)

$$\frac{\sin ASP}{\sin PSD} \cdot \frac{\sin DAP}{\sin PAS} \cdot \frac{\sin SDP}{\sin PDA} = 1 = \frac{\sin ASQ}{\sin QSD} \cdot \frac{\sin DAQ}{\sin QAS} \cdot \frac{\sin SDQ}{\sin QDA}.$$

Но  $\angle DAP = \angle SDQ$ ,  $\angle SDP = \angle DAQ$ ,  $\angle PAS = \angle QDA$  и  $\angle PDA = \angle QAS$ . Поэтому  $\sin ASP : \sin PSD = \sin ASQ : \sin QSD$ . Из этого следует, что точки  $S$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой, так как функция  $\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x}$  монотонна по  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} \right) = -\frac{\sin \alpha}{\sin^2 x}.$$

5.83. а) По теореме Чевы  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C}$ , а по теореме синусов

$$CA_1 = \frac{CA \sin CAA_1}{\sin AA_1B}, \quad A_1B = \frac{AB \sin BAA_1}{\sin AA_1B},$$

$$AB_1 = \frac{AB \sin ABB_1}{\sin AB_1B}, \quad B_1C = \frac{BC \sin CBB_1}{\sin AB_1B}.$$

Подставляя эти четыре равенства в предыдущее равенство и учитывая, что  $AC = BC$ , получаем требуемое.

б) Обозначим точки пересечения прямых  $CM$  и  $CN$  с основанием  $AB$  через  $M_1$  и  $N_1$ . Нужно доказать, что  $M_1 = N_1$ . Из а) следует, что  $AM_1 : M_1B = AN_1 : N_1B$ , т. е.  $M_1 = N_1$ .

5.84. Пусть отрезки  $BM$  и  $BN$  пересекают сторону  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда

$$\frac{\sin PBB_1}{\sin PBA} = \frac{\sin PBB_1}{\sin BPB_1} \cdot \frac{\sin APB}{\sin PBA} = \frac{PB_1}{BB_1} \cdot \frac{AB}{PA}.$$

Если  $O$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ , то  $\frac{AP}{PB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ , а значит,  $\frac{\sin PBB_1}{\sin PBA} = \frac{AB}{BB_1} \cdot \frac{B_1O}{OB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}$ . Заметив, что  $BC_1 : C_1A = BC : CA$ , и проведя аналогичные вычисления для  $\sin QBB_1 : \sin QBC$ , получим  $\sin PBB_1 : \sin PBA = \sin QBB_1 : \sin QBC$ . А так как  $\angle ABB_1 = \angle CBB_1$ , то  $\angle PBB_1 = \angle QBB_1$ .

5.85. а) Пусть точка  $P$  лежит на дуге  $AC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ ;  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Сумма углов при вершинах  $A_1$  и  $C_1$  четырехугольника  $A_1BC_1P$  равна  $180^\circ$ , поэтому  $\angle A_1PC_1 = 180^\circ - \angle B = \angle APC$ . Следовательно,  $\angle APC_1 = \angle A_1PC$ , причем одна из точек  $A_1$  и  $C_1$  (например,  $A_1$ ) лежит на стороне треугольника, а другая — на продолжении стороны. Четырехугольники  $AB_1PC_1$  и  $A_1B_1PC$  вписанные, поэтому  $\angle AB_1C_1 = \angle APC_1 = \angle A_1PC = \angle A_1B_1C$ , а значит, точка  $B_1$  лежит на отрезке  $A_1C_1$ .

б) Как и в задаче а), получаем  $\angle(AP, PC_1) = \angle(AB_1, B_1C) = \angle(CB_1, B_1A_1) = \angle(CP, PA_1)$ . Прибавляя  $\angle(PC_1, PC)$ , получаем  $\angle(AP, PC) = \angle(PC_1, PA_1) = \angle(BC_1, BA_1) = \angle(AB, BC)$ , т. е. точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

5.86. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины отрезков  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$ ;  $O_a$ ,  $O_b$  и  $O_c$  — центры описанных окружностей треугольников  $BSP$ ,  $ACP$  и  $ABP$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на стороны треугольника  $O_aO_bO_c$  (или их продолжения). Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой, поэтому точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $O_aO_bO_c$  (см. задачу 5.85, б).

5.87. Пусть продолжение биссектрисы  $AD$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $P$ . Опустим из точки  $P$  перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ ; ясно, что  $A_1$  — середина отрезка  $BC$ . При гомотетии с центром  $A$ , переводящей  $P$  в  $D$ , точки  $B_1$  и  $C_1$  переходят в  $B'$  и  $C'$ , а значит, точка  $A_1$  переходит в  $M$ , так как она лежит на прямой  $B_1C_1$  и  $PA_1 \parallel DM$ .

5.88. а) Решение задачи 5.85 проходит без изменений и в этом случае.

б) Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$  и  $CA$ , а точки  $A_2$  и  $B_2$  прямых  $BC$  и  $AC$  таковы, что  $\angle(PA_2, BC) = \alpha = \angle(PB_2, AC)$ . Тогда  $\triangle PA_1A_2 \sim \triangle PB_1B_2$ , поэтому точки  $A_1$  и  $B_1$  переходят в  $A_2$  и  $B_2$  при поворотной гомотетии с центром  $P$ , причем  $\angle A_1PA_2 = 90^\circ - \alpha$  — угол поворота.

5.89. а) Пусть угол между прямыми  $PC$  и  $AC$  равен  $\varphi$ . Тогда  $PA = 2R \sin \varphi$ . Так как точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $PC$ , угол между прямыми  $PA_1$  и  $A_1B_1$  тоже равен  $\varphi$ . Поэтому  $PA_1 = d/\sin \varphi$ , а значит,  $PA \cdot PA_1 = 2Rd$ .

б) Так как  $PA_1 \perp BC$ , то  $\cos \alpha = \sin \varphi = d/PA_1$ . Остается заметить, что  $PA_1 = 2Rd/PA$ .

5.90. Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $PC$ , поэтому  $A_1B_1 = PC \sin A_1CB_1 = PC \sin C$ . Пусть угол между прямыми  $AB$  и  $A_1B_1$  равен  $\gamma$  и  $C_1$  — проекция точки  $P$  на прямую  $A_1B_1$ . Прямые  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  совпадают, поэтому  $\cos \gamma = PC/2R$  (см. задачу 5.89). Следовательно, длина проекции отрезка  $AB$  на прямую  $A_1B_1$  равна  $AB \cos \gamma = (2R \sin C) PC/2R = PC \sin C$ .

5.91. Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$  и  $AC$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $PC$ . Так как  $\sin A_1CB_1 = \sin ACB$ , хорды  $A_1B_1$  этой окружности имеют фиксированную длину. Следовательно, прямые  $A_1B_1$  касаются фиксированной окружности.

5.92. Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$  и  $CA$ . Тогда  $\angle(A_1B_1, PB_1) = \angle(A_1C, PC) = -\angle B/2$ . Ясно также, что для всех точек  $P$  прямые  $PB_1$  имеют одно и то же направление.

5.93. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — диаметрально противоположные точки описанной окружности треугольника  $ABC$ ;  $A_i$  и  $B_i$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P_i$  на прямые  $BC$  и  $AC$ ;

$M$  и  $N$  — середины сторон  $AC$  и  $BC$ ;  $X$  — точка пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Согласно задаче 5.92  $A_1B_1 \perp A_2B_2$ . Остается проверить, что  $\angle(MX, XN) = \angle(BC, AC)$ . Так как  $AB_2 = B_1C$ , то  $XM$  — медиана прямоугольного треугольника  $B_1XB_2$ . Поэтому  $\angle(XM, XB_2) = \angle(XB_2, B_2M)$ . Аналогично  $\angle(XA_1, XN) = \angle(A_1N, XA_1)$ . Следовательно,  $\angle(MX, XN) = \angle(XM, XB_2) + \angle(XB_2, XA_1) + \angle(XA_1, XN) = \angle(XB_2, B_2M) + \angle(A_1N, XA_1) + 90^\circ$ . А так как  $\angle(XB_2, B_2M) + \angle(AC, CB) + \angle(NA_1, A_1X) + 90^\circ = 0^\circ$ , то  $\angle(MN, XN) + \angle(AC, CB) = 0^\circ$ .

5.94. Если точка  $R$  данной окружности такова, что  $\angle(\vec{OP}, \vec{OR}) = (\beta + \gamma)/2$ , то  $OR \perp BC$ . Остается проверить, что  $\angle(OR, OQ) = \angle(PA_1, A_1B_1)$ . Но  $\angle(OR, OQ) = \alpha/2$ , а  $\angle(PA_1, A_1B_1) = \angle(PB, BC_1) = \angle(\vec{OP}, \vec{OA})/2 = \alpha/2$ .

5.95. Пусть прямые  $AC$  и  $PQ$  пересекаются в точке  $M$ . Проведем в треугольнике  $MPC$  высоты  $PB_1$  и  $CA_1$ . Тогда  $A_1B_1$  — прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Кроме того, согласно задаче 1.52  $\angle(MB_1, B_1A_1) = \angle(CP, PM)$ . Ясно также, что  $\angle(CP, PM) = \angle(CA, AQ) = \angle(MB_1, AQ)$ . Следовательно,  $A_1B_1 \parallel AQ$ .

5.96. Проведем хорду  $PQ$ , перпендикулярную  $BC$ . Пусть точки  $H'$  и  $P'$  симметричны точкам  $H$  и  $P$  относительно прямой  $BC$ ; точка  $H'$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$  (задача 5.9). Докажем сначала, что  $AQ \parallel P'H$ . В самом деле,  $\angle(AH', AQ) = \angle(PH', PQ) = \angle(AH', P'H)$ . Прямая Симсона точки  $P$  параллельна  $AQ$  (задача 5.95), т. е. она проходит через середину стороны  $PP'$  треугольника  $PP'H$  и параллельна стороне  $P'H$ , а значит, она проходит через середину стороны  $PH$ .

5.97. Пусть  $H_a, H_b, H_c$  и  $H_d$  — ортоцентры треугольников  $BCD, CDA, DAB$  и  $ABC$ . Прямые  $l_a, l_b, l_c$  и  $l_d$  проходят через середины отрезков  $AH_a, BH_b, CH_c$  и  $DH_d$  (см. задачу 5.96). Середины этих отрезков совпадают с такой точкой  $H$ , что  $2OH = OA + OB + OC + OD$ , где  $O$  — центр окружности (см. задачу 13.33).

5.98. а) Пусть  $B_1, C_1$  и  $D_1$  — проекции точки  $P$  на прямые  $AB, AC$  и  $AD$ . Точки  $B_1, C_1$  и  $D_1$  лежат на окружности с диаметром  $AP$ . Прямые  $B_1C_1, C_1D_1$  и  $D_1B_1$  являются прямыми Симсона точки  $P$  относительно треугольников  $ABC, ACD$  и  $ADB$  соответственно. Поэтому проекции точки  $P$  на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой — прямой Симсона треугольника  $B_1C_1D_1$ . Аналогично доказывается, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек.

б) Пусть  $P$  — точка описанной окружности  $n$ -угольника  $A_1 \dots A_n$ ;  $B_2, B_3, \dots, B_n$  — проекции точки  $P$  на прямые  $A_1A_2, \dots, A_1A_n$ . Точки  $B_2, \dots, B_n$  лежат на окружности с диаметром  $A_1P$ . Докажем по индукции, что прямая Симсона точки  $P$  относительно  $n$ -угольника  $A_1 \dots A_n$  совпадает с прямой Симсона точки  $P$  относительно  $(n-1)$ -угольника  $B_2 \dots B_n$  (для  $n=4$  это было доказано в задаче а). По предположению индукции прямая Симсона  $(n-1)$ -угольника  $A_1A_3 \dots A_n$

совпадает с прямой Симсона  $(n-2)$ -угольника  $B_3 \dots B_n$ . Поэтому проекции точки  $P$  на прямые Симсона  $(n-1)$ -угольников, вершины которых получаются последовательным исключением точек  $A_2, \dots, A_n$  из набора  $A_1, \dots, A_n$ , лежат на прямой Симсона  $(n-1)$ -угольника  $B_2 \dots B_n$ . А проекция точки  $P$  на прямую Симсона  $(n-1)$ -угольника  $A_2 \dots A_n$  лежит на той же прямой потому, что наши рассуждения показывают, что любые  $n-1$  из рассматриваемых  $n$  точек проекций лежат на одной прямой.

**5.99.** Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на окружности с диаметром  $AP$ . Поэтому  $B_1 C_1 = AP \sin B_1 A C_1 = AP(BC/2R)$ .

**5.100.** Эта задача является частным случаем задачи 2.43.

**5.101.** Ясно, что  $\angle C_1 A P = \angle C_1 B_1 P = \angle A_2 B_1 P = \angle A_2 C_2 P = \angle B_3 C_2 P = \angle B_3 A_3 P$  (первое, третье и пятое равенства получаются из вписанности соответствующих четырехугольников; остальные равенства очевидны). Аналогично  $\angle B_1 A P = \angle C_3 A_3 P$ . Поэтому  $\angle B_3 A_3 C_3 = \angle B_3 A_3 P + \angle C_3 A_3 P = \angle C_1 A P + \angle B_1 A P = \angle B A C$ . Аналогично получаются равенства остальных углов треугольников  $ABC$  и  $A_3 B_3 C_3$ .

**5.102.** Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC, CA$  и  $AB$ ;  $A_2, B_2$  и  $C_2$  — точки пересечения прямых  $PA, PB$  и  $PC$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ . Пусть далее  $S, S_1$  и  $S_2$  — площади треугольников  $ABC, A_1 B_1 C_1$  и  $A_2 B_2 C_2$ . Легко проверить, что  $a_1 = a \cdot AP/2R$  (задача 5.99) и  $a_2 = a \cdot B_2 P/CP$ . Треугольники  $A_1 B_1 C_1$  и  $A_2 B_2 C_2$  подобны (задача 5.100), поэтому  $S_1/S_2 = k^2$ , где  $k = a_1/a_2 = AP \cdot CP/(2R \cdot B_2 P)$ . А так как  $B_2 P \cdot BP = |d^2 - R^2|$ , то  $S_1/S_2 = (AP \cdot BP \cdot CP)^2/4R^2(d^2 - R^2)^2$ . Треугольники  $A_2 B_2 C_2$  и  $ABC$  вписаны в одну окружность, поэтому  $S_2/S = a_2 b_2 c_2/abc$  (см. задачу 12.1). Ясно также, что, например,  $a_2/a = B_2 P/CP = |d^2 - R^2|/(BP \cdot CP)$ . Следовательно,  $S_2 : S = |d^2 - R^2|^3 : (AP \cdot BP \cdot CP)^2$ . Поэтому  $S_1/S = (S_1/S_2)(S_2/S) = |d^2 - R^2|/4R^2$ .

**5.103.** Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на окружности с диаметром  $PA$ , поэтому середина отрезка  $PA$  является центром описанной окружности треугольника  $AB_1 C_1$ . Следовательно,  $l_a$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $B_1 C_1$ . Поэтому прямые  $l_a, l_b$  и  $l_c$  проходят через центр описанной окружности треугольника  $A_1 B_1 C_1$ .

**5.104.** а) Опустим из точек  $P_1$  и  $P_2$  перпендикуляры  $P_1 B_1$  и  $P_2 B_2$  на  $AC$  и перпендикуляры  $P_1 C_1$  и  $P_2 C_2$  на  $AB$ . Докажем, что точки  $B_1, B_2, C_1$  и  $C_2$  лежат на одной окружности. В самом деле,  $\angle P_1 B_1 C_1 = \angle P_1 A C_1 = \angle P_2 A B_2 = \angle P_2 C_2 B_2$ , а так как  $\angle P_1 B_1 A = \angle P_2 C_2 A$ , то  $\angle C_1 B_1 A = \angle B_2 C_2 A$ . Центр окружности, на которой лежат указанные точки, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $B_1 B_2$  и  $C_1 C_2$ , а оба эти перпендикуляра проходят через середину  $O$  отрезка  $P_1 P_2$ , т. е.  $O$  — центр этой окружности. В частности, точки  $B_1$  и  $C_1$  равноудалены от точки

$O$ . Аналогично точки  $A_1$  и  $B_1$  равноудалены от точки  $O$ , т. е.  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ . Кроме того,  $OB_1 = OB_2$ .

б) Предыдущее доказательство проходит почти без изменений и в этом случае.

**5.105.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  подобны, причем коэффициент подобия равен 2. Высоты треугольника  $A_1B_1C_1$  пересекаются в точке  $O$ , поэтому  $OA_1 : HA = 1 : 2$ . Пусть  $M'$  — точка пересечения отрезков  $OH$  и  $AA_1$ . Тогда  $OM' : M'H = OA_1 : HA = 1 : 2$  и  $AM' : M'A_1 = OA_1 : HA = 1 : 2$ , т. е.  $M' = M$ .

**5.106.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ ;  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  — основания высот;  $A_3$ ,  $B_3$  и  $C_3$  — середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами. Так как  $A_2C_1 = C_1A = A_1B_1$  и  $A_1A_2 \parallel B_1C_1$ , точка  $A_2$  лежит на описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ . Аналогично точки  $B_2$  и  $C_2$  лежат на описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .

Рассмотрим теперь окружность  $S$  с диаметром  $A_1A_3$ . Так как  $A_1B_3 \parallel CC_2$  и  $A_3B_3 \parallel AB$ , то  $\angle A_1B_3A_3 = 90^\circ$ , а значит, точка  $B_3$  лежит на окружности  $S$ . Аналогично доказывается, что точки  $C_1$ ,  $B_1$  и  $C_3$  лежат на окружности  $S$ . Окружность  $S$  проходит через вершины треугольника  $A_1B_1C_1$ , поэтому она является его описанной окружностью.

При гомотетии с центром  $H$  и коэффициентом  $1/2$  описанная окружность треугольника  $ABC$  переходит в описанную окружность треугольника  $A_3B_3C_3$ , т. е. в окружность девяти точек. Значит, при этой гомотетии точка  $O$  переходит в центр окружности девяти точек.

**5.107.** а) Докажем, например, что треугольники  $ABC$  и  $HBC$  имеют общую окружность девяти точек. В самом деле, окружности девяти точек обоих треугольников проходят через середину стороны  $BC$  и середины отрезков  $BH$  и  $CH$ .

б) Прямая Эйлера проходит через центр окружности девяти точек, а окружность девяти точек у этих треугольников общая.

в) Центром симметрии является центр окружности девяти точек этих треугольников.

**5.108.** Пусть  $AB > BC > CA$ . Легко проверить, что для остроугольного и тупоугольного треугольников точка  $H$  пересечения высот и центр  $O$  описанной окружности расположены именно так, как на рис. 59 (т. е. для остроугольного треугольника точка  $O$  лежит внутри треугольника  $BHC_1$ , а для тупоугольного точки  $O$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой  $CH$ ). Поэтому в остроугольном треугольнике прямая Эйлера пересекает наибольшую сторону  $AB$  и наименьшую сторону  $AC$ , а в тупоугольном треугольнике — наибольшую сторону  $AB$  и среднюю по длине сторону  $BC$ .

**5.109.** а) Пусть  $O_a$ ,  $O_b$  и  $O_c$  — центры вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ . Вершины треугольника  $ABC$  являются основаниями



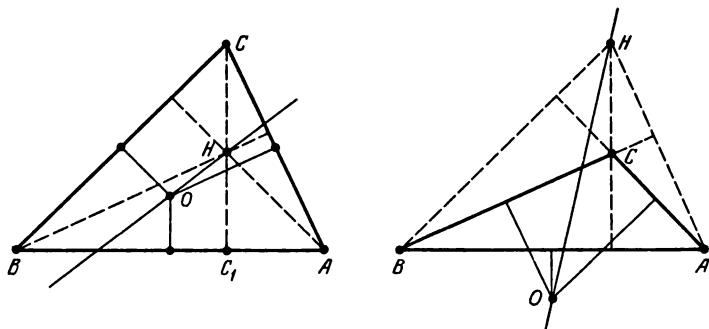


Рис. 59

высот треугольника  $O_a O_b O_c$  (задача 5.2), поэтому окружность девяти точек треугольника  $O_a O_b O_c$  проходит через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

б) Пусть  $O$  — точка пересечения высот треугольника  $O_a O_b O_c$ , т. е. точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ . Окружность девяти точек треугольника  $O_a O_b O_c$  делит пополам отрезок  $OO_a$ .

**5.110.** Пусть  $AA_1$  — высота,  $H$  — точка пересечения высот. Согласно задаче 5.45, б)  $AH = 2R |\cos A|$ . Медианы делятся точкой их пересечения в отношении 1:2, поэтому прямая Эйлера параллельна  $BC$  тогда и только тогда, когда  $AH:AA_1 = 2:3$  и векторы  $AH$  и  $AA_1$  сонаправлены, т. е.  $2R \cos A : 2R \sin B \sin C = 2:3$ . Учитывая, что  $\cos A = -\cos(B+C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$ , получаем  $\sin B \sin C = 3 \cos B \cos C$ .

**5.111.** Пусть  $CD$  — высота,  $O$  — центр описанной окружности,  $N$  — середина стороны  $AB$ , а точка  $E$  делит пополам отрезок, соединяющий  $C$  с точкой пересечения высот. Тогда  $CENO$  — параллелограмм, поэтому  $\angle NED = \angle OCH = |\angle A - \angle B|$  (см. задачу 2.88). Точки  $N$ ,  $E$  и  $D$  лежат на окружности девяти точек, поэтому отрезок  $ND$  виден из ее центра под углом  $2\angle NED = 2|\angle A - \angle B|$ .

**5.112.** Пусть  $O$  и  $I$  — центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ ,  $H$  — точка пересечения высот; прямые  $AI$  и  $BI$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Предположим, что треугольник  $ABC$  не равнобедренный. Тогда  $OI:IH = OA_1:AH$  и  $OI:IH = OB_1:BH$ . Так как  $OB_1 = OA_1$ , то  $AH = BH$ , а значит,  $AC = BC$ . Приходим к противоречию.

**5.113.** Пусть  $O$  и  $I$  — центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ ,  $H$  — ортоцентр треугольника  $A_1 B_1 C_1$ . Проведем в треугольнике  $A_1 B_1 C_1$  высоты  $A_1 A_2$ ,  $B_1 B_2$  и  $C_1 C_2$ . Треугольник  $A_1 B_1 C_1$  остроугольный (например,  $\angle B_1 A_1 C_1 = (\angle B + \angle C)/2 < 90^\circ$ ), поэтому  $H$  — центр вписанной окружности треугольника  $A_2 B_2 C_2$  (см. задачу 1.56, а). Стороны треугольников  $ABC$  и  $A_2 B_2 C_2$  параллельны (см. задачу 1.54, а), поэтому существует гомотетия, переводящая

треугольник  $ABC$  в  $A_2B_2C_2$ . При этой гомотетии точка  $O$  переходит в точку  $I$ , а точка  $I$  — в точку  $H$ , поэтому прямая  $IH$  проходит через точку  $O$ .

5.114. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ ,  $E$  и  $M$  — середины отрезков  $CH$  и  $AB$  (рис. 60). Тогда  $C_1MC_2E$  — прямоугольник. Пусть прямая  $CC_2$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $C_3$ . Докажем, что  $\overline{AC_3} : \overline{C_3B} = \operatorname{tg} 2\alpha : \operatorname{tg} 2\beta$ . Легко проверить, что  $\overline{C_3M} : \overline{C_2E} = \overline{MC_2} : \overline{EC}$ ,  $\overline{EC} = R \cos \gamma$ ,  $\overline{MC_2} = \overline{C_1E} = 2R \sin \alpha \sin \beta - R \cos \gamma$  и  $\overline{C_2E} = \overline{MC_1} = R \sin(\beta - \alpha)$ , поэтому

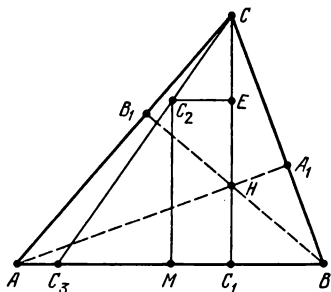


Рис. 60

$$\begin{aligned} \overline{C_3M} &= R \sin(\beta - \alpha) (2 \sin \beta \sin \alpha - \cos \gamma) / \cos \gamma = \\ &= R \sin(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha) / \cos \gamma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3B}} = \frac{\overline{AM} + \overline{MC_3}}{\overline{C_3M} + \overline{MB}} = \frac{\sin 2\gamma + \sin 2(\alpha - \beta)}{\sin 2\gamma - \sin 2(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\beta}.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{C_3B}} \cdot \frac{\overline{BA_3}}{\overline{A_3C}} \cdot \frac{\overline{CB_3}}{\overline{B_3A}} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\beta} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\gamma} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\gamma}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1.$$

5.115. Решим сразу задачу б). Докажем сначала, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Пусть описанные окружности треугольников  $A_1BC$  и  $AB_1C$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда  $\angle(BO, OA) = \angle(BO, OC) + \angle(OC, OA) = \angle(BA_1, A_1C) + \angle(CB_1, B_1A) = \angle(BA, AC_1) + \angle(C_1B, BA) = \angle(C_1B, AC_1)$ , т. е. описанная окружность треугольника  $ABC_1$  тоже проходит через точку  $O$ . Поэтому  $\angle(AO, OA_1) = \angle(AO, OB) + \angle(BO, OA_1) = \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BC, CA_1) = 0^\circ$ , т. е. прямая  $AA_1$  проходит через точку  $O$ . Аналогично доказывается, что прямые  $BB_1$  и  $CC_1$  проходят через точку  $O$ .

Докажем теперь, что точка  $O$  совпадает с искомой точкой  $P$ . Так как  $\angle VAP = \angle A - \angle CAP$ , то равенство  $\angle ABP = \angle CAP$  эквивалентно равенству  $\angle VAP + \angle ABP = \angle A$ , т. е.  $\angle APB = \angle B + \angle C$ . Для точки  $O$  последнее равенство очевидно, так как она лежит на описанной окружности треугольника  $ABC_1$ .

5.116. а) Докажем, что  $\neg AB = \neg B_1C_1$ , т. е.  $AB = B_1C_1$ . В самом деле,  $\neg AB = \neg AC_1 + \neg C_1B$ , а  $\neg C_1B = \neg AB_1$ , поэтому  $\neg AB = \neg AC_1 + \neg AB_1 = \neg B_1C_1$ .

б) Будем считать, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  вписаны в одну окружность, причем треугольник  $ABC$  фиксирован, а треугольник  $A_1B_1C_1$  вращается. Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника  $A_1B_1C_1$  (задача 7.20, б). При этом может возникнуть 12 различных семейств треугольников  $A_1B_1C_1$ : треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  могут совмещаться поворотом или осевой симметрией; кроме того, вершинам треугольника символы  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  можно сопоставить шестью различными способами.

Из этих 12 семейств треугольников четыре семейства никогда не могут дать искомой точки  $P$ . Для одинаково ориентированных треугольников исключаются случаи  $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$ ,  $\triangle ABC = \triangle C_1B_1A_1$  и  $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$  (например, в случае  $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$  точка  $P$  является точкой пересечения прямой  $BC = B_1C_1$  и касательной к окружности в точке  $A = A_1$ ; треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  при этом совпадают). Для противоположно ориентированных треугольников исключается случай  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  (в этом случае  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ).

**Замечание.** Точкам Брокера соответствуют противоположно ориентированные треугольники; для первой точки Брокера  $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$ , а для второй точки Брокера  $\triangle ABC = \triangle C_1A_1B_1$ .

**5.117.** а) Так как  $PC = \frac{AC \sin CAP}{\sin APC}$  и  $PC = \frac{BC \sin CBP}{\sin BPC}$ , то  $\frac{\sin \varphi \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\beta - \varphi) \sin \alpha}{\sin \beta}$ . Учитывая, что  $\sin(\beta - \varphi) = \sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi$ , получаем  $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}$ . Остается заметить, что  $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha$ .

б) Для второго угла Брокера получаем точно такое же выражение, как и в задаче а). Ясно также, что оба угла Брокера острые.

в) Так как  $\angle A_1BC = \angle BCA$  и  $\angle BCA_1 = \angle CAB$ , то  $\triangle CA_1B \sim \triangle ABC$ . Поэтому точка Брокера  $P$  лежит на отрезке  $AA_1$  (см. задачу 5.115, б).

**5.118.** а) Согласно задаче 10.38, а)  $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30^\circ$ , поэтому  $\varphi \leq 30^\circ$ .

б) Пусть  $P$  — первая точка Брокера треугольника  $ABC$ . Точка  $M$  лежит внутри (или на границе) одного из треугольников  $ABP$ ,  $BCP$  и  $CAP$ . Если, например, точка  $M$  лежит внутри треугольника  $ABP$ , то  $\angle ABM \leq \angle ABP \leq 30^\circ$ .

**5.119.** Прямые  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и  $C_1A_1$  являются серединными перпендикулярами к отрезкам  $AQ$ ,  $BQ$  и  $CQ$ . Поэтому, например,  $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \angle AQC = \angle A$ . Для других углов доказательство аналогично.

Кроме того, прямые  $A_1O$ ,  $B_1O$  и  $C_1O$  являются серединными перпендикулярами к отрезкам  $CA$ ,  $AB$  и  $BC$ . Поэтому, например,

острые углы  $OA_1C_1$  и  $ACQ$  имеют взаимно перпендикулярные стороны, поэтому они равны. Аналогичные рассуждения показывают, что  $\angle OA_1C_1 = \angle OB_1A_1 = \angle OC_1B_1 = \varphi$ , где  $\varphi$  — угол Брокара треугольника  $ABC$ .

**5.120.** По теореме синусов  $R_1 = AB/2 \sin APB$ ,  $R_2 = BC/2 \sin BPC$  и  $R_3 = CA/2 \sin CPA$ . Ясно также, что  $\sin APB = \sin A$ ,  $\sin BPC = \sin B$  и  $\sin CPA = \sin C$ .

**5.121.** Треугольник  $ABC_1$  равнобедренный, причем угол при его основании  $AB$  равен углу Брокара  $\varphi$ . Поэтому  $\angle(PC_1, C_1Q) = \angle(BC_1, C_1A) = 2\varphi$ . Аналогично  $\angle(PA_1, A_1Q) = \angle(PB_1, B_1Q) = \angle(PC_1, C_1Q) = 2\varphi$ .

**5.122.** Так как  $\angle CA_1B_1 = \angle A + \angle AB_1A_1$  и  $\angle AB_1A_1 = \angle CA_1C_1$ , то  $\angle B_1A_1C_1 = \angle A$ . Аналогично доказывается, что равны и остальные углы треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

Описанные окружности треугольников  $AA_1B_1$ ,  $BB_1C_1$  и  $CC_1A_1$  пересекаются в одной точке  $O$  (задача 2.80, а). Ясно, что  $\angle AOA_1 = \angle AB_1A_1 = \varphi$ . Аналогично  $\angle BOB_1 = \angle COC_1 = \varphi$ . Поэтому  $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = 180^\circ - \angle A$ . Аналогично  $\angle BOC = 180^\circ - \angle B$  и  $\angle COA = 180^\circ - \angle C$ , т. е.  $O$  — первая точка Брокара обоих треугольников. Следовательно, при поворотной гомотетии на угол  $\varphi$  с центром  $O$  и коэффициентом  $AO/A_1O$  треугольник  $A_1B_1C_1$  переходит в треугольник  $ABC$ .

**5.123.** По теореме синусов  $AB/BM = \sin AMB/\sin BAM$  и  $AB/BN = \sin ANB/\sin BAN$ . Значит,

$$\frac{AB^2}{BM \cdot BN} = \frac{\sin AMB \sin ANB}{\sin BAM \sin BAN} = \frac{\sin AMC \sin ANC}{\sin CAN \sin CAM} = \frac{AC^2}{CM \cdot CN}.$$

**5.124.** Так как  $\angle BAS = \angle CAM$ , то  $BS/CM = S_{BAS}/S_{CAM} = AB \cdot AS/(AC \cdot AM)$ , т. е.  $AS/AM = 2b \cdot BS/ac$ . Остается заметить, что  $BS = ac^2/(b^2 + c^2)$  и  $2AM = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$  (см. задачи 5.123 и 12.11, а)).

**5.125.** При симметрии относительно биссектрисы угла  $A$  отрезок  $B_1C_1$  переходит в отрезок, параллельный стороне  $BC$ , а прямая  $AS$  — в прямую  $AM$ , где  $M$  — середина стороны  $BC$ .

**5.126.** Возьмем на отрезках  $BC$  и  $BA$  точки  $A_1$  и  $C_1$  так, что  $A_1C_1 \parallel BK$ . Так как  $\angle BAC = \angle CBK = \angle BA_1C_1$  и  $\angle BCA = \angle BC_1A_1$ , то отрезок  $A_1C_1$  антипараллелен стороне  $AC$ . С другой стороны, согласно задаче 3.31, б) прямая  $BD$  делит отрезок  $A_1C_1$  пополам.

**5.127.** Достаточно воспользоваться результатом задачи 3.30.

**5.128.** Пусть  $AP$  — общая хорда рассматриваемых окружностей,  $Q$  — точка пересечения прямых  $AP$  и  $BC$ . Тогда  $BQ/AB = \sin BAQ/\sin AQB$  и  $AC/CQ = \sin AQC/\sin CAQ$ . Значит,  $BQ/CQ = AB \sin BAP/AC \sin CAP$ . Так как  $AC$  и  $AB$  — касательные к окружностям  $S_1$  и  $S_2$ , то  $\angle CAP = \angle ABP$  и  $\angle BAP = \angle ACP$ ,

а значит,  $\angle APB = \angle APC$ . Поэтому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AP} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{\sin APB}{\sin ABP} \cdot \frac{\sin ACP}{\sin APC} = \frac{\sin ACP}{\sin ABP} = \frac{\sin BAP}{\sin CAP}.$$

Следовательно,  $BQ/CQ = AB^2/AC^2$ .

**5.129.** Пусть  $S$ —точка пересечения прямых  $AX$  и  $BC$ . Тогда  $AS/AB = CS/CX$  и  $AS/AC = BS/BX$ , а значит,  $CS/BS = (AC/AB) \cdot (XC/XB)$ . Остается заметить, что  $XC/XB = AC/AB$  (см. решение задачи 7.16, а).

**5.130.** Пусть  $L$ ,  $M$  и  $N$ —середины отрезков  $CA$ ,  $CB$  и  $CH$ . Так как  $\triangle BAC \sim \triangle CAH$ , то  $\triangle BAM \sim \triangle CAN$ , а значит,  $\angle BAM = \angle CAN$ . Аналогично  $\angle ABL = \angle CBN$ .

**5.131.** Пусть  $B_1C_1$ ,  $C_2A_2$  и  $A_3B_3$ —данные отрезки. Тогда треугольники  $A_2XA_3$ ,  $B_1XB_3$  и  $C_1XC_2$  равнобедренные; пусть длины их боковых сторон равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Прямая  $AX$  делит отрезок  $B_1C_1$  пополам тогда и только тогда, когда эта прямая содержит симедиану. Поэтому если  $X$ —точка Лемуана, то  $a=b$ ,  $b=c$  и  $c=a$ . А если  $B_1C_1 = C_2A_2 = A_3B_3$ , то  $b+c=c+a=a+b$ , а значит,  $a=b=c$ .

**5.132.** Пусть  $M$ —точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ;  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  и  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ —расстояния от точек  $K$  и  $M$  до сторон треугольника. Так как точки  $K$  и  $M$  изогонально сопряжены, то  $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$ ; кроме того,  $aa_2 = bb_2 = cc_2$  (см. задачу 4.1). Следовательно,  $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$ . Используя это равенство и учитывая, что площади треугольников  $A_1B_1K$ ,  $B_1C_1K$  и  $C_1A_1K$  равны  $a_1b_1c/4R$ ,  $b_1c_1a/4R$  и  $c_1a_1b/4R$ , где  $R$ —радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ , получаем, что площади этих треугольников равны. Кроме того, точка  $K$  лежит внутри треугольника  $A_1B_1C_1$ . Следовательно,  $K$ —точка пересечения медиан треугольника  $A_1B_1C_1$  (см. задачу 4.2).

**5.133.** Медианы треугольника  $A_1B_1C_1$  пересекаются в точке  $K$  (задача 5.132), поэтому стороны треугольника  $ABC$  перпендикулярны медианам треугольника  $A_1B_1C_1$ . После поворота на  $90^\circ$  стороны треугольника  $ABC$  станут параллельны медианам треугольника  $A_1B_1C_1$ , а значит, медианы треугольника  $ABC$  станут параллельны сторонам треугольника  $A_1B_1C_1$  (см. задачу 13.2). Поэтому медианы треугольника  $ABC$  перпендикулярны сторонам треугольника  $A_1B_1C_1$ .

**5.134.** Пусть  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ —проекции точки  $K$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Тогда  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$  (задача 5.100) и  $K$ —точка пересечения медиан треугольника  $A_2B_2C_2$  (задача 5.132). Поэтому преобразование подобия, переводящее треугольник  $A_2B_2C_2$  в треугольник  $A_1B_1C_1$ , переводит точку  $K$  в точку  $M$  пересечения медиан треугольника  $A_1B_1C_1$ . Кроме того, например,  $\angle KA_2C_2 = \angle KBC_2 = \angle B_1A_1K$ , т. е. точки  $K$  и  $M$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $A_1B_1C_1$ , а значит,  $K$ —точка Лемуана треугольника  $A_1B_1C_1$ .

$OL \perp B_1C_1$ . Кроме того,  $AN \perp B_1C_1$  (задача 5.133) и  $O$  — середина отрезка  $AK$ , а значит,  $OL$  — средняя линия треугольника  $AKN$  и  $KL = LN$ . Следовательно,  $K$  — середина отрезка  $A_1N$ . Остается заметить, что при гомотетии с центром  $M$ , переводящей  $N$  в  $A$ , отрезок  $NA_1$  переходит в высоту  $AH$ .

## Глава 6

# МНОГОУГОЛЬНИКИ

---

### Основные сведения

1. Многоугольник называют *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины.

2. Выпуклый многоугольник называют *описанным*, если все его стороны касаются некоторой окружности. Выпуклый четырехугольник является описанным тогда и только тогда, когда  $AB + CD = BC + AD$ .

Выпуклый многоугольник называют *вписанным*, если все его вершины лежат на одной окружности. Выпуклый четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда  $\angle ABC + \angle CDA = \angle DAB + \angle BCD$ .

3. Выпуклый многоугольник называют *правильным*, если все его стороны равны и все углы также равны.

Выпуклый  $n$ -угольник является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на угол  $2\pi/n$  с центром в некоторой точке  $O$  он переходит в себя. Точку  $O$  называют *центром* правильного многоугольника.

### Вводные задачи

1. Докажите, что выпуклый четырехугольник  $ABCD$  можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ .

2. Докажите, что в выпуклый четырехугольник  $ABCD$  можно вписать окружность тогда и только тогда, когда  $AB + CD = BC + AD$ .

3. а) Докажите, что оси симметрии правильного многоугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что правильный  $2n$ -угольник имеет центр симметрии.

4. а) Докажите, что сумма углов при вершинах выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .

б) Выпуклый  $n$ -угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что количество этих треугольников равно  $n-2$ .

### § 1. Вписанные и описанные четырехугольники

6.1. Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник — ромб.

6.2. Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $O$ . Докажите, что  $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ .

6.3. Докажите, что если существуют окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника перпендикулярны.

6.4. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

6.5. Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

6.6. Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $O$ . В треугольнике  $AOB$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ , а в треугольнике  $COD$  — высоты  $CC_1$  и  $DD_1$ . Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  лежат на одной прямой.

6.7. Углы при основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны  $2\alpha$  и  $2\beta$ . Докажите, что трапеция описанная тогда и только тогда, когда  $BC/AD = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ .

6.8. В треугольнике  $ABC$  проведены отрезки  $PQ$  и  $RS$ , параллельные стороне  $AC$ , и отрезок  $BM$  (рис. 62). Трапеции  $RPKL$  и  $MLSC$  описанные. Докажите, что трапеция  $APQC$  тоже описанная.

6.9. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Лучи  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  описанный тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:  $AB + CD = BC + AD$ ,  $AP + CQ = AQ + CP$  или  $BP + BQ = DP + DQ$ .

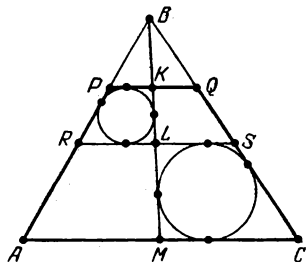


Рис. 62

6.10. Через точки пересечения продолжений сторон выпуклого четырехугольника  $ABCD$  проведены две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Докажите, что если четырехугольники, примыкающие к вершинам  $B$  и  $D$ , описанные, то четырехугольник  $ABCD$  тоже описанный.

6.11. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон исходного четырехугольника с вписанной окружностью.

\* \* \*



6.12. Четырехугольник  $ABCD$  вписанный;  $H_c$  и  $H_d$  — ортоцентры треугольников  $ABD$  и  $ABC$ . Докажите, что  $CDH_cH_d$  — параллелограмм.

6.13. Четырехугольник  $ABCD$  вписанный. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$  образуют прямоугольник.

6.14. Продолжения сторон четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ , а его диагонали пересекаются в точке  $S$ .

а) Расстояния от точек  $P$ ,  $Q$  и  $S$  до точки  $O$  равны  $p$ ,  $q$  и  $s$ , а радиус описанной окружности равен  $R$ . Найдите длины сторон треугольника  $PQS$ .

б) Докажите, что высоты треугольника  $PQS$  пересекаются в точке  $O$ .

\* \* \*

6.15. Диагональ  $AC$  разбивает четырехугольник  $ABCD$  на два треугольника, вписанные окружности которых касаются диагонали  $AC$  в одной точке. Докажите, что вписанные окружности треугольников  $ABD$  и  $BCD$  тоже касаются диагонали  $BD$  в одной точке, а точки их касания со сторонами четырехугольника лежат на одной окружности.

6.16. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на его стороны являются вершинами описанного четырехугольника, если только они не попадают на продолжения сторон.

6.17. Докажите, что если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то проекции точки пересечения диагоналей на стороны являются вершинами вписанного четырехугольника.

См. также задачи 13.33, 13.34, 16.4.

## § 2. Четырехугольники

6.18. Угол между сторонами  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  равен  $\varphi$ . Докажите, что  $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2(AB \cdot BC \cos B + BC \cdot CD \cos C + CD \cdot AB \cos \varphi)$ .

6.19. В четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  равны, причем лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей, перпендикулярна биссектрисе угла  $AOD$ .

6.20. На сторонах  $BC$  и  $AD$  четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM:MC = AN:ND = AB:CD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что прямая  $MN$  параллельна биссектрисе угла  $AOD$ .

6.21. Докажите, что биссектрисы углов выпуклого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

6.22. Два различных параллелограмма  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  с соответственно параллельными сторонами вписаны в четырехугольник  $PQRS$  (точки  $A$  и  $A_1$  лежат на стороне  $PQ$ ,  $B$  и  $B_1$  — на  $QR$  и т. д.). Докажите, что диагонали четырехугольника параллельны сторонам параллелограммов.

6.23. Середины  $M$  и  $N$  диагоналей  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  не совпадают. Прямая  $MN$  пересекает стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $M_1$  и  $N_1$ . Докажите, что если  $MM_1 = NN_1$ , то  $AD \parallel BC$ .

6.24. Докажите, что два четырехугольника подобны тогда и только тогда, когда у них равны четыре соответственных угла и соответственные углы между диагоналями.

6.25. Четырехугольник  $ABCD$  выпуклый; точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  таковы, что  $AB \parallel C_1D_1$ ,  $AC \parallel B_1D_1$  и т. д. для всех пар вершин. Докажите, что четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  тоже выпуклый, причем  $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$ .

6.26. Из вершин выпуклого четырехугольника опущены перпендикуляры на диагонали. Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями перпендикуляров, подобен исходному четырехугольнику.

6.27. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

6.28. Диагонали описанной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $O$ . Радиусы вписанных окружностей треугольников  $AOD, AOB, BOC$  и  $COD$  равны  $r_1, r_2, r_3$  и  $r_4$  соответственно. Докажите, что  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$ .

6.29. Окружность радиуса  $r_1$  касается сторон  $DA, AB$  и  $BC$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , окружность радиуса  $r_2$  — сторон  $AB, BC$  и  $CD$ ; аналогично определяются  $r_3$  и  $r_4$ . Докажите, что  $\frac{AB}{r_1} + \frac{CD}{r_3} = \frac{BC}{r_2} + \frac{AD}{r_4}$ .

6.30. О выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABC, BCD, CDA$  и  $DAB$ , равны между собой. Докажите, что  $ABCD$  — прямоугольник.

6.31. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ ;  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  — центры описанных окружностей треугольников  $BCD, CDA, DAB$  и  $ABC$ . Аналогично для четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  определяются точки  $A_2, B_2, C_2$  и  $D_2$ . Докажите,

что четырехугольники  $ABCD$  и  $A_2B_2C_2D_2$  подобны, причем коэффициент их подобия равен  $|(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D)|/4$ .

6.32. Окружности, диаметрами которых служат стороны  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , касаются сторон  $CD$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что  $BC \parallel AD$ .

6.33. Четыре прямые задают четыре треугольника. Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой.

### § 3. Теорема Птолемея

6.34. Четырехугольник  $ABCD$  вписанный. Докажите, что  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$  (Птолемей).

6.35. Четырехугольник  $ABCD$  вписанный. Докажите, что

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

6.36. Пусть  $\alpha = \pi/7$ . Докажите, что  $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$ .

6.37. Расстояния от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равны  $d_a$ ,  $d_b$  и  $d_c$ . Докажите, что  $d_a + d_b + d_c = R + r$ .

6.38. Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ . Докажите, что  $AB + AC \leq 2AD$ .

6.39. На дуге  $CD$  описанной окружности квадрата  $ABCD$  взята точка  $P$ . Докажите, что  $PA + PC = \sqrt{2} PB$ .

6.40. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Окружность, проходящая через точку  $A$ , пересекает отрезки  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  в точках  $P$ ,  $Q$  и  $R$  соответственно. Докажите, что  $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$ .

6.41. На дуге  $A_1A_{2n+1}$  описанной окружности  $S$  правильного  $(2n+1)$ -угольника  $A_1 \dots A_{2n+1}$  взята точка  $A$ . Докажите, что:

- $d_1 + d_3 + \dots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \dots + d_{2n}$ , где  $d_i = AA_i$ ;
- $l_1 + \dots + l_{2n+1} = l_2 + \dots + l_{2n}$ , где  $l_i$  — длина касательной, проведенной из точки  $A$  к окружности радиуса  $r$ , касающейся  $S$  в точке  $A_i$  (все касания одновременно внутренние или внешние).

6.42. Окружности радиуса  $x$  и  $y$  касаются окружности радиуса  $R$ , причем расстояние между точками касания равно  $a$ . Вычислите длину следующей общей касательной к первым двум окружностям:

- внешней, если оба касания внешние или внутренние одновременно;

б) внутренней, если одно касание внутреннее, а другое внешнее.

**6.43.** Окружности  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  касаются данной окружности в вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Пусть  $t_{\alpha\beta}$  — длина общей касательной к окружностям  $\alpha$  и  $\beta$  (внешней, если оба касания внутренние или внешние одновременно, и внутренней, если одно касание внутреннее, а другое внешнее);  $t_{\beta\gamma}$ ,  $t_{\gamma\delta}$  и т. д. определяются аналогично. Докажите, что  $t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}$  (обобщенная теорема Птолемея).

См. также задачу 9.67.

## § 4. Пятиугольники

**6.44.** В равностороннем (неправильном) пятиугольнике  $ABCDE$  угол  $ABC$  вдвое больше угла  $DBE$ . Найдите величину угла  $ABC$ .

**6.45.** а) Диагонали  $AC$  и  $BE$  правильного пятиугольника  $ABCDE$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $CKE$  касается прямой  $BC$ .

б) Пусть  $a$  — длина стороны правильного пятиугольника,  $d$  — длина его диагонали. Докажите, что  $d^2 = a^2 + ad$ .

**6.46.** Докажите, что в правильный пятиугольник можно так вписать квадрат, что его вершины будут лежать на четырех сторонах пятиугольника.

**6.47.** Правильный пятиугольник  $ABCDE$  со стороной  $a$  вписан в окружность  $S$ . Прямые, проходящие через его вершины перпендикулярно сторонам, образуют правильный пятиугольник со стороной  $b$  (рис. 63). Сторона правильного пятиугольника, описанного около окружности  $S$ , равна  $c$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 = c^2$ .

См. также задачи 2.59, 4.9, 9.23, 9.44, 10.63, 10.67, 13.10, 13.56, 20.11.

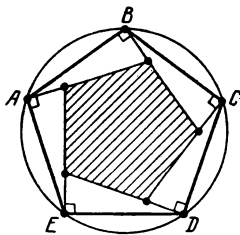


Рис. 63

## § 5. Шестиугольники

**6.48.** Противоположные стороны выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  попарно параллельны. Докажите, что:

а) площадь треугольника  $ACE$  составляет не менее половины площади шестиугольника.

б) площади треугольников  $ACE$  и  $BDF$  равны.

**6.49.** Все углы выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  равны. Докажите, что  $|BC - EF| = |DE - AB| = |AF - CD|$ .

**6.50.** Суммы углов при вершинах  $A, C, E$  и  $B, D, F$  выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  с равными сторонами равны. Докажите, что противоположные стороны этого шестиугольника параллельны.

**6.51.** Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждая из трех диагоналей, соединяющих противоположные вершины, делит площадь пополам, то эти диагонали пересекаются в одной точке.

**6.52.** Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждый из трех отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, делит площадь пополам, то эти отрезки пересекаются в одной точке.

См. также задачи 2.11, 2.20, 2.46, 3.66, 4.6, 4.28, 4.31, 5.80, 9.45, а), 9.76—9.78, 13.3, 14.6, 18.22, 18.23.

## § 6. Правильные многоугольники

**6.53.** Число сторон многоугольника  $A_1 \dots A_n$  нечетно. Докажите, что:

а) если этот многоугольник вписанный и все его углы равны, то он правильный;

б) если этот многоугольник описанный и все его стороны равны, то он правильный.

**6.54.** Все углы выпуклого многоугольника  $A_1 \dots A_n$  равны, и из некоторой его внутренней точки  $O$  все стороны видны под равными углами. Докажите, что этот многоугольник правильный.

**6.55.** Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем стянута так, чтобы узел стал плоским (рис. 64). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

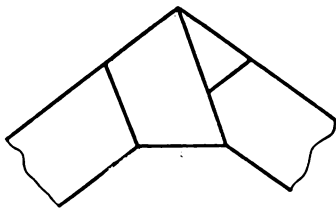


Рис. 64

**6.56.** На сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  построены внутренним образом правильные треугольники  $ABK, BCL, CDM$  и  $DAN$ . Докажите, что середины сторон этих треугольников (не являющихся

сторонами квадрата) и середины отрезков  $KL, LM, MN$  и  $NK$  образуют правильный двенадцатиугольник.

\* \* \*

**6.57.** Существует ли правильный многоугольник, длина одной диагонали которого равна сумме длин двух других диагоналей?

**6.58.** Правильный  $(4k+2)$ -угольник вписан в окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ . Докажите, что сумма длин отрезков, отсекаемых углом  $A_k O A_{k+1}$  на прямых  $A_1 A_{2k}$ ,  $A_2 A_{2k-1}$ , ...,  $A_k A_{k+1}$ , равна  $R$ .

**6.59.** В правильном восемнадцатиугольнике  $A_1 \dots A_{18}$  проведены диагонали  $A_a A_d$ ,  $A_b A_e$  и  $A_c A_f$ . Пусть  $k=a-b$ ,  $p=b-c$ ,  $m=c-d$ ,  $q=d-e$ ,  $n=e-f$  и  $r=f-a$ . Докажите, что указанные диагонали пересекаются в одной точке в любом из следующих случаев:

- а)  $\{k, m, n\} = \{p, q, r\}$ ;
- б)  $\{k, m, n\} = \{1, 2, 7\}$  и  $\{p, q, r\} = \{1, 3, 4\}$ ;
- в)  $\{k, m, n\} = \{1, 2, 8\}$  и  $\{p, q, r\} = \{2, 2, 3\}$ .

**З а м е ч а н и е.** Равенство  $\{k, m, n\} = \{x, y, z\}$  означает, что указанные наборы чисел совпадают; порядок их записи при этом не учитывается.

**6.60.** В правильном тридцатиугольнике проведены три диагонали. Определим для них наборы  $\{k, m, n\}$  и  $\{p, q, r\}$  так же, как и в предыдущей задаче. Докажите, что если  $\{k, m, n\} = \{1, 3, 14\}$  и  $\{p, q, r\} = \{2, 2, 8\}$ , то диагонали пересекаются в одной точке.

**6.61.** В правильном  $n$ -угольнике ( $n \geq 3$ ) отмечены середины всех сторон и диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

**6.62.** Вершины правильного  $n$ -угольника окрашены в несколько цветов так, что точки одного цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

**6.63.** Докажите, что при  $n \geq 6$  правильный  $(n-1)$ -угольник нельзя так вписать в правильный  $n$ -угольник, чтобы на всех сторонах  $n$ -угольника, кроме одной, лежало ровно по одной вершине  $(n-1)$ -угольника.

\* \* \*

**6.64.** Пусть  $O$  — центр правильного  $n$ -угольника  $A_1 \dots A_n$ ,  $X$  — произвольная точка. Докажите, что  $\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$  и  $\vec{XA_1} + \dots + \vec{XA_n} = n\vec{XO}$ .

**6.65.** Докажите, что в вершинах правильного  $n$ -угольника можно расставить действительные числа  $x_1, \dots, x_n$ , все отличные от нуля, так, чтобы для любого правильного  $k$ -угольника, все вершины которого являются вершинами исходного  $n$ -угольника, сумма чисел, стоящих в его вершинах, равнялась нулю.

6.66. Точка  $A$  лежит внутри правильного десятиугольника  $X_1...X_{10}$ , а точка  $B$  — вне его. Пусть  $a = \overrightarrow{AX_1} + ... + \overrightarrow{AX_{10}}$  и  $b = \overrightarrow{BX_1} + ... + \overrightarrow{BX_{10}}$ . Может ли оказаться, что  $|a| > |b|$ ?

6.67. Правильный  $n$ -угольник  $A_1...A_n$  вписан в окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ ;  $X$  — произвольная точка. Докажите, что  $A_1X^2 + ... + A_nX^2 = n(R^2 + d^2)$ , где  $d = OX$ .

6.68. Найдите сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ .

6.69. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки  $X$  до вершин правильного  $n$ -угольника будет наименьшей, если  $X$  — центр  $n$ -угольника.

6.70. Правильный  $n$ -угольник  $A_1...A_n$  вписан в окружность радиуса  $R$  с центром  $O$ ;  $e_i = OA_i$ ,  $x = OX$  — произвольный вектор. Докажите, что  $\sum (e_i, x)^2 = nR^2 \cdot OX^2/2$ .

6.71. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ , до произвольной прямой, проходящей через центр  $n$ -угольника.

6.72. Расстояние от точки  $X$  до центра правильного  $n$ -угольника равно  $d$ ,  $r$  — радиус вписанной окружности  $n$ -угольника. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки  $X$  до прямых, содержащих стороны  $n$ -угольника, равна  $n(r^2 + d^2/2)$ .

6.73. Докажите, что сумма квадратов длин проекций сторон правильного  $n$ -угольника на любую прямую равна  $na^2/2$ , где  $a$  — сторона  $n$ -угольника.

6.74. Правильный  $n$ -угольник  $A_1...A_n$  вписан в окружность радиуса  $R$ ;  $X$  — точка этой окружности. Докажите, что  $XA_1^4 + ... + XA_n^4 = 6nR^4$ .

6.75. а) Правильный  $n$ -угольник  $A_1...A_n$  вписан в окружность радиуса 1 с центром  $O$ ;  $e_i = OA_i$ ,  $u$  — произвольный вектор. Докажите, что  $\sum (u, e_i)e_i = nu/2$ .

б) Из произвольной точки  $X$  опущены перпендикуляры  $XA_1, ..., XA_n$  на стороны правильного  $n$ -угольника (или на их продолжения). Докажите, что  $\sum XA_i^2 = nXO^2/2$ , где  $O$  — центр  $n$ -угольника.

6.76. Докажите, что если число  $n$  не является степенью простого числа, то существует выпуклый  $n$ -угольник со сторонами длиной 1, 2, ...,  $n$ , все углы которого равны.

См. также задачи 2.9, 4.59, 4.62, 6.36, 6.41, 6.45—6.47, 9.83, 9.84, 11.46, 11.48, 17.31, 18.30, 19.47, 23.8, 24.2.

## § 7. Вписанные и описанные многоугольники

**6.77.** На сторонах треугольника внешним образом построены три квадрата. Какими должны быть углы треугольника, чтобы шесть вершин этих квадратов, отличных от вершин треугольника, лежали на одной окружности?

**6.78.** В окружность вписан  $2n$ -угольник  $A_1 \dots A_{2n}$ . Пусть  $p_1, \dots, p_{2n}$  — расстояния от произвольной точки  $M$  окружности до сторон  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{2n} A_1$ . Докажите, что  $p_1 p_3 \dots p_{2n-1} = p_2 p_4 \dots p_{2n}$ .

**6.79.** Вписанный многоугольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов всех вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от разбиения.

**6.80.** Два  $n$ -угольника вписаны в одну окружность, причем наборы длин их сторон одинаковы, но не обязательно равны соответственные стороны. Докажите, что площади этих многоугольников равны.

**6.81.** Положительные числа  $a_1, \dots, a_n$  таковы, что  $2a_i < a_1 + \dots + a_n$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Докажите, что существует вписанный  $n$ -угольник, длины сторон которого равны  $a_1, \dots, a_n$ .

\* \* \*

**6.82.** Точка, лежащая внутри описанного  $n$ -угольника, соединена отрезками со всеми вершинами и точками касания. Образовавшиеся при этом треугольники попеременно окрашены в красный и синий цвет. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.

**6.83.** В  $2n$ -угольнике ( $n$  нечетно)  $A_1 \dots A_{2n}$ , описанном около окружности с центром  $O$ , диагонали  $A_1 A_{n+1}, A_2 A_{n+2}, \dots, A_{n-1} A_{2n-1}$  проходят через точку  $O$ . Докажите, что и диагональ  $A_n A_{2n}$  проходит через точку  $O$ .

**6.84.** Окружность радиуса  $r$  касается сторон многоугольника в точках  $A_1, \dots, A_n$ , причем длина стороны, на которой лежит точка  $A_i$ , равна  $a_i$ . Точка  $X$  удалена от центра окружности на расстояние  $d$ . Докажите, что  $a_1 X A_1^2 + \dots + a_n X A_n^2 = P(r^2 + d^2)$ , где  $P$  — периметр многоугольника.

**6.85.** Около окружности описан  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$ ;  $l$  — произвольная касательная к окружности, не проходящая через вершины  $n$ -угольника. Пусть  $a_i$  — расстояние от вершины  $A_i$  до прямой  $l$ ,  $b_i$  — расстояние от точки касания стороны  $A_i A_{i+1}$  с окружностью до прямой  $l$ . Докажите, что:

а) величина  $b_1 \dots b_n / (a_1 \dots a_n)$  не зависит от выбора прямой  $l$ ;

б) величина  $a_1 a_3 \dots a_{2m-1} / (a_2 a_4 \dots a_{2m})$  не зависит от выбора прямой  $l$ , если  $n = 2m$ .



**6.86.** Некоторые стороны выпуклого многоугольника красные, остальные синие. Сумма длин красных сторон меньше половины периметра, и нет ни одной пары соседних синих сторон. Докажите, что в этот многоугольник нельзя вписать окружность.

См. также задачи 2.12, 4.39, 19.6.

## § 8. Произвольные выпуклые многоугольники

**6.87.** Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

**6.88.** Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

**6.89.** Для каких  $n$  существует выпуклый  $n$ -угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

**6.90.** Может ли выпуклый неправильный пятиугольник иметь ровно четыре стороны одинаковой длины и ровно четыре диагонали одинаковой длины?

Может ли в таком пятиугольнике пятая сторона иметь общую точку с пятой диагональю?

**6.91.** Точка  $O$ , лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждым двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Докажите, что точка  $O$  равноудалена от вершин этого многоугольника.

См. также задачи 4.49, 4.50, 9.82, 9.85, 9.86, 11.35, 13.14, 14.26, 16.8, 17.33, 17.34, 19.9, 23.13, 23.15.

## § 9. Теорема Паскаля

**6.92.** Докажите, что точки пересечения противоположных сторон (если эти стороны не параллельны) вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (Паскаль).

**6.93.** Точка  $M$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ ;  $R$  — произвольная точка. Прямые  $AR$ ,  $BR$  и  $CR$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что точки пересечения прямых  $MA_1$  и  $BC$ ,  $MB_1$  и  $CA$ ,  $MC_1$  и  $AB$  лежат на одной прямой, проходящей через точку  $R$ .

**6.94.** В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  и биссектрисы  $AA_2$  и  $BB_2$ ; вписанная окружность касается сторон  $BC$  и  $AC$  в точках  $A_3$  и  $B_3$ . Докажите, что прямые  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  и  $A_3B_3$  пересекаются в одной точке или параллельны.

**6.95.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $S$ ;  $X$  — произвольная точка,  $M$  и  $N$  — вторые точки пересечения

прямых  $XA$  и  $XD$  с окружностью  $S$ . Прямые  $DC$  и  $AX$ ,  $AB$  и  $DX$  пересекаются в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $MN$  и  $EF$  лежит на прямой  $BC$ .

**6.96.** Точки  $A$  и  $A_1$ , лежащие внутри окружности с центром  $O$ , симметричны относительно точки  $O$ . Лучи  $AP$  и  $A_1P_1$  сонаправлены, лучи  $AQ$  и  $A_1Q_1$  тоже сонаправлены. Докажите, что точка пересечения прямых  $P_1Q$  и  $PQ_1$  лежит на прямой  $AA_1$ . (Точки  $P, P_1, Q$  и  $Q_1$  лежат на окружности.)

**6.97.** Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте шестую точку этой окружности.

**6.98.** Точки  $A_1, \dots, A_6$  лежат на одной окружности, а точки  $K, L, M$  и  $N$  — на прямых  $A_1A_2, A_3A_4, A_1A_6$  и  $A_4A_5$  соответственно, причем  $KL \parallel A_2A_3$ ,  $LM \parallel A_3A_6$  и  $MN \parallel A_6A_5$ . Докажите, что  $NK \parallel A_5A_2$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**6.99.** Докажите, что если  $ABCD$  — прямоугольник, а  $P$  — произвольная точка, то  $AP^2 + CP^2 = DP^2 + BP^2$ .

**6.100.** Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  перпендикулярны. На его сторонах внешним образом построены квадраты с центрами  $P, Q, R$  и  $S$ . Докажите, что отрезок  $PR$  проходит через точку пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ , причем  $PR = (AC + BD) / \sqrt{2}$ .

**6.101.** На наибольшей стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$  и  $C_1$  так, что  $AC_1 = AB$  и  $CA_1 = CB$ , а на сторонах  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $A_2$  и  $C_2$  так, что  $AA_1 = AA_2$  и  $CC_1 = CC_2$ . Докажите, что четырехугольник  $A_1A_2C_2C_1$  вписанный.

**6.102.** В окружность вписан выпуклый семиугольник. Докажите, что если какие-то три его угла равны  $120^\circ$ , то какие-то две его стороны равны.

**6.103.** На плоскости даны правильный  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$  и точка  $P$ . Докажите, что из отрезков  $A_1P, \dots, A_nP$  можно составить замкнутую линию.

**6.104.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $S_1$  и описан около окружности  $S_2$ ;  $K, L, M$  и  $N$  — точки касания его сторон с окружностью  $S_2$ . Докажите, что  $KM \perp LN$ .

**6.105.** Около окружности описан пятиугольник  $ABCDE$ , длины сторон которого — целые числа, причем  $AB = CD = 1$ . Найдите длину отрезка  $BK$ , где  $K$  — точка касания стороны  $BC$  с окружностью.

**6.106.** Докажите, что в правильном  $2n$ -угольнике  $A_1 \dots A_{2n}$  диагонали  $A_1A_{n+2}$ ,  $A_{2n-1}A_3$  и  $A_{2n}A_5$  пересекаются в одной точке.

**6.107.** Докажите, что в правильном двадцатичетырехугольнике  $A_1 \dots A_{24}$  диагонали  $A_1 A_7$ ,  $A_3 A_{11}$  и  $A_5 A_{21}$  пересекаются в точке, лежащей на диаметре  $A_4 A_{16}$ .

## Решения

**6.1.** Пусть  $O$  — центр вписанной окружности и точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ . Тогда  $\angle ACB = \angle ACD$  и  $\angle BAC = \angle CAD$ . Поэтому треугольники  $ABC$  и  $ADC$  равны, так как сторона  $AC$  у них общая. Следовательно,  $AB = DA$ . Аналогично  $AB = BC = CD = DA$ .

**6.2.** Ясно, что  $\angle AOB = 180^\circ - \angle BAO - \angle ABO = 180^\circ - (\angle A + \angle B)/2$  и  $\angle COD = 180^\circ - (\angle C + \angle D)/2$ . Следовательно,  $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)/2 = 180^\circ$ .

**6.3.** Рассмотрим две окружности, касающиеся сторон данного четырехугольника и их продолжений. Прямые, содержащие стороны четырехугольника, являются общими внутренними и внешними касательными к этим окружностям. Прямая, соединяющая центры окружностей, содержит диагональ четырехугольника, и, кроме того, она является осью симметрии четырехугольника. Значит, вторая диагональ перпендикулярна этой прямой.

**6.4.** Пусть  $O$  — центр данной окружности,  $R$  — ее радиус,  $a$  — длина хорд, отсекаемых окружностью на сторонах четырехугольника. Тогда расстояния от точки  $O$  до сторон четырехугольника равны  $\sqrt{R^2 - a^2/4}$ , т. е. она равноудалена от сторон четырехугольника и является центром вписанной окружности.

**6.5.** Для параллелограмма утверждение задачи очевидно, поэтому можно считать, что прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются. Пусть  $O$  — центр вписанной окружности четырехугольника  $ABCD$ ;  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Тогда  $S_{ANB} + S_{CND} = S_{AMB} + S_{CMD} = S_{AOB} + S_{COD} = S_{ABCD}/2$ . Остается воспользоваться результатом задачи 7.2.

**6.6.** Пусть вписанная окружность касается сторон  $DA$ ,  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$ ,  $H$  и  $N$  соответственно. Тогда  $OH$  — высота треугольника  $AOB$  и при симметрии относительно прямых  $AO$  и  $BO$  точка  $H$  переходит в точки  $M$  и  $N$  соответственно. Поэтому согласно задаче 1.57 точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на прямой  $MN$ . Аналогично точки  $C_1$  и  $D_1$  лежат на прямой  $MN$ .

**6.7.** Пусть  $r$  — расстояние от точки пересечения биссектрис углов  $A$  и  $D$  до основания  $AD$ ,  $r'$  — расстояние от точки пересечения биссектрис углов  $B$  и  $C$  до основания  $BC$ . Тогда  $AD = r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$  и  $BC = r'(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$ . Поэтому  $r = r'$  тогда и только тогда, когда  $BC/AD = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)/(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

**6.8.** Пусть  $\angle A = 2\alpha$ ,  $\angle C = 2\beta$  и  $\angle BMA = 2\varphi$ . Согласно задаче 6.7  $PK/RL = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi$  и  $LS/MC = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \beta$ . Так как  $PQ/RS = PK/RL$

и  $RS/AC = LS/MC$ , то  $PQ/AC = (PK/RL)(LS/MC) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ . Следовательно, трапеция  $APQC$  описанная.

**6.9.** Докажем сначала, что если четырехугольник  $ABCD$  описанный, то выполняются все условия. Пусть  $K, L, M$  и  $N$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB, BC, CD$  и  $DA$ . Тогда  $AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = BC + AD$ ,  $AP + CQ = AK + PK + QL - CL = AN + PM + QN - CM = AQ + CP$  и  $BP + BQ = AP - AB + BC + CQ = (AP + CQ) + (BC - AB) = AQ + CP + CD - AD = DP + DQ$ .

Докажем теперь, например, что если  $BP + BQ = DP + DQ$ , то четырехугольник  $ABCD$  описанный. Рассмотрим для этого окружность, касающуюся стороны  $BC$  и лучей  $BA$  и  $CD$ . Предположим, что прямая  $AD$  не касается этой окружности; сдвинем эту прямую так, чтобы она коснулась окружности (рис. 65). Пусть  $S$  — такая точка прямой  $AQ$ , что  $Q'S \parallel DD'$ . Так как  $BP + BQ = DP + DQ$  и  $BP + BQ' = D'P + D'Q'$ , то  $QS + SQ' = QQ'$ . Получено противоречие. В двух других случаях доказательство проводится аналогично.

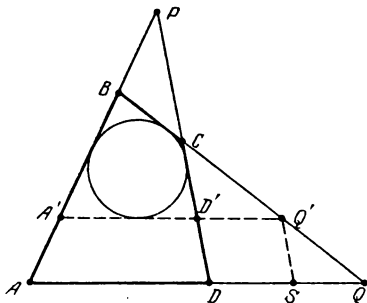


Рис. 65

**6.10.** Пусть лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ ; данные прямые, проходящие через точки  $P$  и  $Q$ , пересекнутся в точке  $O$ . Согласно задаче 6.9  $BP + BQ = OP + OQ$  и  $OP + OQ = DP + DQ$ . Следовательно,  $BP + BQ = DP + DQ$ , а значит, четырехугольник  $ABCD$  описанный.

**6.11.** Пусть стороны  $AB, BC, CD, DA$  четырехугольника  $ABCD$  касаются вписанной окружности в точках  $E, F, G, H$  соответственно.

Покажем сначала, что прямые  $FH, EG$  и  $AC$  пересекаются в одной точке. Обозначим точки, в которых прямые  $FH$  и  $EG$  пересекают прямую  $AC$ , через  $M$  и  $M'$  соответственно. Поскольку  $\angle AHM = \angle CFM$  как углы между касательными и хордой  $HF$ , то

$$\sin AHM = \sin CFM. \quad \text{Поэтому} \quad \frac{AM \cdot MH}{FM \cdot MC} = \frac{S_{AMH}}{S_{FMC}} = \frac{AH \cdot MH}{FC \cdot FM}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AH}{FC}. \quad \text{Аналогично} \quad \frac{AM'}{M'C} = \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{FC} = \frac{AM}{MC}, \quad \text{поэтому} \quad M = M', \quad \text{т. е.}$$

прямые  $FH, EG$  и  $AC$  пересекаются в одной точке.

Аналогичные рассуждения показывают, что прямые  $FH, EG$  и  $BD$  пересекаются в одной точке, поэтому прямые  $AC, BD, FH$  и  $EG$  пересекаются в одной точке.

**6.12.** Отрезки  $CH_d$  и  $DH_c$  параллельны, так как они перпендикулярны прямой  $BC$ . Кроме того, так как  $\angle BCA = \angle BDA = \varphi$ , длины этих отрезков равны  $AB|\operatorname{ctg} \varphi|$  (см. задачу 5.45, б).

**6.13.** Пусть  $O_a, O_b, O_c$  и  $O_d$  — центры вписанных окружностей треугольников  $BCD, ACD, ABD$  и  $ABC$  соответственно. Так как  $\angle ADB = \angle ACB$ , то  $\angle AO_cB = 90^\circ + (\angle ADB/2) = 90^\circ + (\angle ACB/2) = \angle AO_dB$  (см. задачу 5.3). Поэтому четырехугольник  $ABO_dO_c$  вписанный, т. е.  $\angle O_cO_dB = 180^\circ - \angle O_cAB = 180^\circ - (\angle A/2)$ . Аналогично  $\angle O_dO_dB = 180^\circ - (\angle C/2)$ . Так как  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ , то  $\angle O_cO_dB + \angle O_dO_dB = 270^\circ$ , а значит,  $\angle O_aO_dO_c = 90^\circ$ . Аналогично доказывается, что и остальные углы четырехугольника  $O_aO_bO_cO_d$  равны  $90^\circ$ .

**6.14.** а) Пусть лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Докажем, что точка  $M$ , в которой пересекаются описанные окружности треугольников  $CBP$  и  $CDQ$ , лежит на отрезке  $PQ$ . В самом деле,  $\angle CMP + \angle CMQ = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ . Поэтому  $PM + QM = PQ$ , а так как  $PM \cdot PQ = PD \cdot PC = p^2 - R^2$  и  $QM \cdot PQ = QD \cdot QA = q^2 - R^2$ , то  $PQ^2 = PM \cdot PQ + QM \cdot PQ = p^2 + q^2 - 2R^2$ .

Пусть  $N$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ACP$  и  $ABS$ . Докажем, что точка  $S$  лежит на отрезке  $PN$ . В самом деле,  $\angle ANP = \angle ACP = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - \angle ABD = \angle ANS$ . Поэтому  $PN - SN = PS$ , а так как  $PN \cdot PS = PA \cdot PB = p^2 - R^2$  и  $SN \cdot PS = SA \cdot SC = R^2 - s^2$ , то  $PS^2 = PN \cdot PS - SN \cdot PS = p^2 + s^2 - 2R^2$ . Аналогично  $QS^2 = q^2 + s^2 - 2R^2$ .

б) Согласно задаче а)  $PQ^2 - PS^2 = q^2 - s^2 = OQ^2 - OS^2$ . Следовательно,  $OP \perp QS$  (см. задачу 7.6). Аналогично доказывается, что  $OQ \perp PS$  и  $OS \perp PQ$ .

**6.15.** Пусть вписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ACD$  касаются диагонали  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Тогда  $AM = (AC + AB - BC)/2$  и  $AN = (AC + AD - CD)/2$  (см. задачу 3.2). Точки  $M$  и  $N$  совпадают тогда и только тогда, когда  $AM = AN$ , т. е.  $AB + CD = BC + AD$ . Итак, если точки  $M$  и  $N$  совпадают, то четырехугольник  $ABCD$  описанный, и аналогичные рассуждения показывают, что точки касания вписанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $BCD$  с диагональю  $BD$  совпадают.

Пусть вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB, BC$  и  $CA$  в точках  $P, Q$  и  $M$ , а вписанная окружность треугольника  $ACD$  касается сторон  $AC, CD$  и  $DA$  в точках  $M, R$  и  $S$ . Так как  $AP = AM = AS$  и  $CQ = CM = CR$ , то треугольники  $APS, BPQ, CQR$  и  $DRS$  равнобедренные; пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  — углы при основаниях этих равнобедренных треугольников. Сумма углов этих треугольников равна  $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ , поэтому  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ . Следовательно,  $\angle SPQ + \angle SRQ = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$ , т. е. четырехугольник  $PQRS$  вписанный.

**6.16.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ ;  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  — ее проекции на стороны  $AB, BC, CD$  и  $DA$ . Точки  $A_1$  и  $D_1$  лежат на окружности с диаметром  $AO$ , поэтому  $\angle OA_1D_1 = \angle OAD_1$ . Аналогично  $\angle OA_1B_1 = \angle OBB_1$ . А так как  $\angle CAD = \angle CBD$ , то  $\angle OA_1D_1 = \angle OA_1B_1$ . Аналогично доказывается, что  $B_1O, C_1O$  и  $D_1O$  — биссектрисы углов четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , т. е.  $O$  — центр его вписанной окружности.

**6.17.** Воспользуемся обозначениями рис. 66. Условие вписанности четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  эквивалентно тому, что  $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ$ , а перпендикулярность диагоналей  $AC$  и  $BD$  — тому, что  $(\alpha_1 + \delta_1) + (\beta_1 + \gamma_1) = 180^\circ$ . Ясно также, что  $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$  и  $\delta = \delta_1$ .

**6.18.** По теореме косинусов  $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \times \cos ACD$  и  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$ . А так как длина проекции отрезка  $AC$  на прямую  $l$ , перпендикулярную  $CD$ , равна сумме длин проекций отрезков  $AB$  и  $BC$  на прямую  $l$ , то  $AC \cos ACD = AB \cos \varphi + BC \cos C$ .

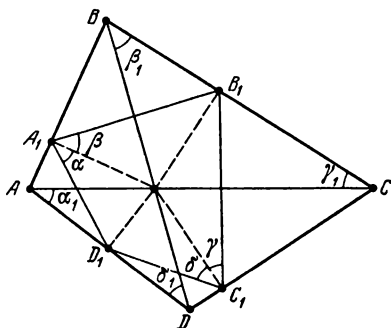


Рис. 66

**6.19.** Пусть  $\angle AOD = 2\alpha$ . Тогда расстояния от точки  $O$  до проекций середин диагоналей  $AC$  и  $BD$  на биссектрису угла  $AOD$  равны  $\cos \alpha (OA + OC)/2$  и  $\cos \alpha (OB + OD)/2$  соответственно. Так как  $OA + OC = AB + OB + OC = CD + OB + OC = OB + OD$ , эти проекции совпадают.

**6.20.** Построим треугольники  $ABM$  и  $DCM$  до параллелограммов  $ABMM_1$  и  $DCMM_2$ . Так как  $AM_1 : DM_2 = BM : MC = AN : DN$ , то  $\triangle ANM_1 \sim \triangle DNM_2$ . Поэтому точка  $N$  лежит на отрезке  $M_1M_2$  и  $MM_1 : MM_2 = AB : CD = AN : ND = M_1N : M_2N$ , т. е.  $MN$  — биссектриса угла  $M_1MM_2$ .

**6.21.** Пусть  $a, b, c$  и  $d$  — биссектрисы углов при вершинах  $A, B, C$  и  $D$ . Нужно проверить, что  $\angle(a, b) + \angle(c, d) = 0^\circ$ . Ясно, что  $\angle(a, b) = \angle(a, AB) + \angle(AB, b)$  и  $\angle(c, d) = \angle(c, CD) + \angle(CD, d)$ . Так как четырехугольник  $ABCD$  выпуклый и  $\angle(a, AB) = \angle(AD, AB)/2$ ,  $\angle(AB, b) = \angle(AB, BC)/2$ ,  $\angle(c, CD) = \angle(CB, CD)/2$ ,  $\angle(CD, d) = \angle(CD, DA)/2$ , то  $\angle(a, b) + \angle(c, d) = (\angle(AD, AB) + \angle(AB, BC) + \angle(CB, CD) + \angle(CD, DA))/2 = 360^\circ/2 = 0^\circ$  (см. «Основные сведения» гл. 2).

**6.22.** Пусть для определенности  $AB > A_1B_1$ . При параллельном переносе на вектор  $\overrightarrow{CB}$  треугольник  $SD_1C_1$  переходит в  $S'D'_1C'_1$ , а отрезок  $CD$  переходит в  $BA$ . Так как  $QA_1 : QA = A_1B_1 : AB = S'D'_1 : S'A$ , то  $QS' \parallel A_1D'_1$ . Следовательно,  $QS' \parallel AD$ . Аналогично  $PR \parallel AB$ .

**6.23.** Предположим, что прямые  $AD$  и  $BC$  не параллельны. Пусть  $M_2$ ,  $K$ ,  $N_2$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  соответственно. Если  $MN \parallel BC$ , то  $BC \parallel AD$ , так как  $AM = MC$  и  $BN = ND$ . Поэтому будем считать, что прямые  $MN$  и  $BC$  не параллельны, т. е.  $M_1 \neq M_2$  и  $N_1 \neq N_2$ . Ясно, что  $\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BC}/2 = \overrightarrow{NN_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{NN_1}$ . Поэтому  $M_1M_2 \parallel N_1N_2$ . Следовательно,  $KM \parallel AB \parallel CD \parallel KN$ , т. е.  $M = N$ . Получено противоречие.

**6.24.** Преобразованием подобия можно совместить одну пару соответственных сторон четырехугольников, поэтому достаточно рассмотреть четырехугольники  $ABCD$  и  $ABC_1D_1$ , у которых точки  $C_1$  и  $D_1$  лежат на лучах  $BC$ ,  $AD$  и  $CD \parallel C_1D_1$ . Обозначим точки пересечения диагоналей четырехугольников  $ABCD$  и  $ABC_1D_1$  через  $O$  и  $O_1$  соответственно.

Предположим, что точки  $C$  и  $D$  лежат ближе к точкам  $B$  и  $A$ , чем точки  $C_1$  и  $D_1$ . Докажем, что тогда  $\angle AOB > \angle AO_1B$ . В самом деле,  $\angle C_1BA > \angle CAB$  и  $\angle D_1BA > \angle DBA$ , поэтому  $\angle AO_1B = 180^\circ - \angle C_1AB - \angle D_1BA < 180^\circ - \angle CAB - \angle DBA = \angle AOB$ . Получено противоречие, поэтому  $C_1 = C$ ,  $D_1 = D$ .

**6.25.** Любой четырехугольник с точностью до подобия определяется направлениями своих сторон и диагоналей, поэтому достаточно

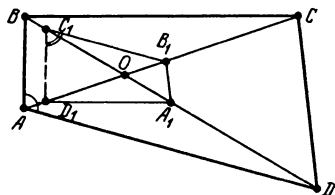


Рис. 67

построить один пример четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$  с требуемыми направлениями сторон и диагоналей. Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ . На луче  $OA$  возьмем произвольную точку  $D_1$  и проведем  $D_1A_1 \parallel BC$ ,  $A_1B_1 \parallel CD$  и  $B_1C_1 \parallel DA$  (рис. 67). Так как  $OC_1 : OB_1 = OD : OA$ ,  $OB_1 : OA_1 = OC : OD$  и  $OA_1 : OD_1 = OB : OC$ ,

то  $OC_1 : OD_1 = OB : OA$ , а значит,  $C_1D_1 \parallel AB$ . Из полученного рисунка ясно, что  $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$ .

**6.26.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha = \angle AOB < 90^\circ$ . Опустим перпендикуляры  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  на диагонали четырехугольника  $ABCD$ . Так как  $OA_1 = OA \cos \alpha$ ,  $OB_1 = OB \cos \alpha$ ,  $OC_1 = OC \cos \alpha$ ,  $OD_1 = OD \cos \alpha$ , то при симметрии относительно биссектрисы угла  $AOB$  четырехугольник  $ABCD$  переходит в четырехугольник, гомотетичный четырехугольнику  $A_1B_1C_1D_1$  (с коэффициентом  $1/\cos \alpha$ ).

**6.27.** Пусть диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ;  $H_a$  и  $H_b$  — ортоцентры треугольников  $AOB$  и  $COD$ ;  $K_a$  и  $K_b$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$ ;  $P$  — середина диагонали  $AC$ . Точки пересечения медиан треугольников  $AOD$  и  $BOC$  делят отрезки  $K_aO$  и  $K_bO$  в отношении  $1:2$ , поэтому нужно доказать, что  $H_aH_b \perp K_aK_b$ .

Так как  $OH_a = AB|\operatorname{ctg} \varphi|$  и  $OH_b = CD|\operatorname{ctg} \varphi|$ , где  $\varphi = \angle AOB$  (см. задачу 5.45,6), то  $OH_a : OH_b = PK_a : PK_b$ . Соответственные стороны углов  $H_aOH_b$  и  $K_aPK_b$  перпендикулярны; кроме того, векторы  $\overrightarrow{OH_a}$  и  $\overrightarrow{OH_b}$  направлены к прямым  $AB$  и  $CD$  при  $\varphi < 90^\circ$  и от этих прямых при  $\varphi > 90^\circ$ . Поэтому  $\angle H_aOH_b = \angle K_aPK_b$  и  $\triangle H_aOH_b \sim \triangle K_aPK_b$ . Следовательно,  $H_aH_b \perp K_aK_b$ .

**6.28.** Пусть  $S = S_{AOD}$ ,  $x = AO$ ,  $y = DO$ ,  $a = AB$ ,  $b = BC$ ,  $c = CD$ ,  $d = DA$ ;  $k$  — коэффициент подобия треугольников  $BOC$  и  $AOD$ . Тогда

$$2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right) = \frac{d+x+y}{S} + \frac{kd+kx+ky}{k^2S},$$

$$2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}\right) = \frac{a+x+ky}{kS} + \frac{c+kx+y}{kS},$$

так как  $S_{BOC} = k^2S$  и  $S_{AOB} = S_{COD} = kS$ . Поскольку

$$\frac{x+y}{S} + \frac{x+y}{k^2S} = \frac{x+ky}{kS} + \frac{kx+y}{kS},$$

остается заметить, что  $a+c=b+d=kd+d$ .

**6.29.** Легко проверить, что  $AB = r_1(\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2))$  и  $CD = r_3(\operatorname{ctg}(C/2) + \operatorname{ctg}(D/2))$ . Поэтому  $AB/r_1 + CD/r_3 = \operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2) + \operatorname{ctg}(C/2) + \operatorname{ctg}(D/2) = BC/r_2 + AD/r_4$ .

**6.30.** Построим треугольники  $ABD$  и  $DBC$  до параллелограммов  $ABDA_1$  и  $DBCC_1$ . Отрезки, соединяющие точку  $D$  с вершинами параллелограмма  $ACC_1A_1$ , делят его на четыре треугольника, равных треугольникам  $DAB$ ,  $CDA$ ,  $BCD$  и  $ABC$ , поэтому радиусы вписанных окружностей этих треугольников равны. Докажем, что точка  $D$  совпадает с точкой  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма. Если  $D \neq O$ , то можно считать, что точка  $D$  лежит внутри треугольника  $AOC$ . Тогда  $r_{ABC} < r_{AOC} = r_{A_1OC_1} < r_{A_1DC_1} = r_{ABC}$  (см. задачу 10.86). Получено противоречие, поэтому  $D = O$ .

Так как  $p = S/r$ , а площади и радиусы вписанных окружностей треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм  $ACC_1A_1$ , равны, то равны и их периметры. Поэтому  $ACC_1A_1$  — ромб, а  $ABCD$  — прямоугольник.

**6.31.** Точки  $C_1$  и  $D_1$  лежат на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ , поэтому  $AB \perp C_1D_1$ . Аналогично  $C_1D_1 \perp A_2B_2$ , а значит,  $AB \parallel A_2B_2$ . Аналогично доказывается, что параллельны и остальные соответственные стороны и диагонали четырехугольников  $ABCD$  и  $A_2B_2C_2D_2$ . Следовательно, эти четырехугольники подобны.

Пусть  $M$  — середина отрезка  $AC$ . Тогда  $B_1M = |AM \operatorname{ctg} D|$  и  $D_1M = |AM \operatorname{ctg} B|$ , причем  $B_1D_1 = |\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D| \cdot AC/2$ . Повернем четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  на  $90^\circ$ . Тогда, воспользовавшись результатом задачи 6.25, получим, что этот четырехугольник выпуклый,



причем  $\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg} C_1$  и т. д. Поэтому  $A_2C_2 = |\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C| \cdot B_1D_1/2 = = |(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} D)/4| \cdot AC$ .

**6.32.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $DP$  на прямую  $MN$ , а из точки  $M$  перпендикуляр  $MQ$  на  $CD$ . Тогда  $Q$  — точка касания прямой  $CD$  и окружности с диаметром  $AB$ . Прямоугольные треугольники  $PDN$  и  $QMN$  подобны, поэтому  $DP = ND \cdot MQ/MN = ND \cdot MA/MN$ . Аналогично расстояние от точки  $A$  до прямой  $MN$  равно  $ND \cdot MA/MN$ . Следовательно,  $AD \parallel MN$ . Аналогично  $BC \parallel MN$ .

**6.33.** Достаточно проверить, что ортоцентры любых трех из данных четырех треугольников лежат на одной прямой. Пусть некоторая прямая пересекает прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно;  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  — ортоцентры треугольников  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ . Прямые  $AB_2$  и  $A_2B$  перпендикулярны прямой  $A_1B_1$ , поэтому они параллельны. Аналогично  $BC_2 \parallel B_2C$  и  $CA_2 \parallel C_2A$ . Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, поэтому точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  тоже лежат на одной прямой (см. задачу 1.12,6).

**6.34.** Возьмем на диагонали  $BD$  точку  $M$  так, что  $\angle MCD = \angle BCA$ . Тогда  $\triangle ABC \sim \triangle DMC$ , так как углы  $BAC$  и  $BDC$  опираются на одну дугу. Поэтому  $AB \cdot CD = AC \cdot MD$ . Поскольку  $\angle MCD = \angle BCA$ , то  $\angle BCM = \angle ACD$  и  $\triangle BCM \sim \triangle ACD$ , так как углы  $CBD$  и  $CAD$  опираются на одну дугу. Поэтому  $BC \cdot AD = AC \cdot BM$ . Следовательно,  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot MD + AC \cdot BM = AC \cdot BD$ .

**6.35.** Пусть  $S$  — площадь четырехугольника  $ABCD$ ,  $R$  — радиус его описанной окружности. Тогда  $S = S_{ABC} + S_{ADC} = AC(AB \cdot BC + AD \cdot DC)/4R$  (см. задачу 12.1). Аналогично  $S = BD(AB \cdot AD + BC \cdot CD)/4R$ . Приравняв эти выражения для  $S$ , получаем требуемое.

**6.36.** Пусть правильный семиугольник  $A_1 \dots A_7$  вписан в окружность. Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику  $A_1A_3A_4A_5$ , получаем  $A_1A_3 \cdot A_5A_4 + A_3A_4 \cdot A_1A_5 = A_1A_4 \cdot A_3A_5$ , т. е.  $\sin 2\alpha \sin \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \sin 3\alpha \sin 2\alpha$ .

**6.37.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . По теореме Птолемея  $AC_1 \cdot OB_1 + AB_1 \cdot OC_1 = AO \cdot B_1C_1$ , где  $O$  — центр описанной окружности. Поэтому  $cd_b + bd_c = aR$ . Аналогично  $ad_c + cd_a = bR$  и  $ad_b + bd_a = cR$ . Кроме того,  $ad_a + bd_b + cd_c = 2S = (a+b+c)r$ . Складывая все эти равенства и сокращая на  $a+b+c$ , получаем требуемое.

**6.38.** По теореме Птолемея  $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$ . Учитывая, что  $CD = BD \geq BC/2$ , получаем требуемое.

**6.39.** Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику  $ABCP$  и сокращая на длину стороны квадрата, получаем требуемое.

**6.40.** Применяя теорему Птолемея к четырехугольнику  $APQR$ , получаем  $AP \cdot RQ + AR \cdot QP = AQ \cdot PR$ . Так как  $\angle ACB = \angle RAQ = \angle RPQ$  и  $\angle RQP = 180^\circ - \angle PAR = \angle ABC$ , то  $\triangle RQP \sim \triangle ABC$ , а значит,  $RQ : QP : PR = AB : BC : CA$ . Остается заметить, что  $BC = AD$ .

**6.41.** а) Запишем теорему Птолемея для всех четырехугольников с вершинами в точке  $A$  и трех последовательных вершинах данного многоугольника; затем сгруппируем в полученных равенствах множители, в которые входят  $d_i$  с четными номерами, в правую часть. Сложив эти равенства, получим  $(2a+b)(d_1+\dots+d_{2n+1})=(2a+b)(d_2+\dots+d_{2n})$ , где  $a$ —сторона данного многоугольника,  $b$ —его наименьшая диагональ.

б) Пусть  $R$ —радиус окружности  $S$ . Тогда  $l_i=d_i\sqrt{(R\pm r)/R}$  (см. задачу 3.20). Остается воспользоваться результатом задачи а).

**6.42.** Пусть оба касания внешние и  $x\leq y$ . Прямая, проходящая через центр  $O$  окружности радиуса  $x$  параллельно отрезку, соединяющему точки касания, пересекает окружность радиуса  $y-x$  (с центром в центре окружности радиуса  $y$ ) в точках  $A$  и  $B$  (рис. 68). Тогда  $OA=a(R+x)/R$  и  $OB=OA+a(y-x)/R=a(R+y)/R$ . Квадрат искомой длины общей внешней касательной равен

$$OA \cdot OB = (a/R)^2 (R+x)(R+y).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если оба касания внутренние, то квадрат длины внешней касательной равен  $(a/R)^2 (R-x)(R-y)$ , а если окружность радиуса  $x$  касается

внешне, а окружность радиуса  $y$ —внутренне, то квадрат длины внутренней касательной равен  $(a/R)^2 (R-y)(R+x)$ .

Замечание. В случае внутреннего касания окружностей предполагается, что  $R>x$  и  $R>y$ .

**6.43.** Пусть  $R$ —радиус описанной окружности четырехугольника  $ABCD$ ;  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  и  $r_d$ —радиусы окружностей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ . Пусть далее  $a=\sqrt{R\pm r_a}$ , причем знак плюс берется в случае внешнего касания, а знак минус—в случае внутреннего; числа  $b$ ,  $c$  и  $d$  определяются аналогично. Тогда  $t_{\alpha\beta}=ab \cdot AB/R$  (см. задачу 6.42) и т. д. Поэтому, домножая равенство  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$  на  $abcd/R$ , получаем требуемое.

**6.44.** Так как  $\angle EBD = \angle ABE + \angle CBD$ , то на стороне  $ED$  можно взять точку  $P$  так, что  $\angle EBP = \angle ABE = \angle AEB$ , т. е.  $BP \parallel AE$ . Тогда  $\angle PBD = \angle EBD - \angle EBP = \angle CBD = \angle BDC$ , т. е.  $BP \parallel CD$ . Следовательно,  $AE \parallel CD$ , а так как  $AE = CD$ , то  $CDEA$ —параллелограмм. Поэтому  $AC = ED$ , т. е. треугольник  $ABC$  равносторонний и  $\angle ABC = 60^\circ$ .

**6.45.** а) Пусть  $O$ —центр описанной окружности треугольника  $SKE$ . Достаточно проверить, что  $\angle COK = 2\angle KCB$ . Оба эти угла легко вычисляются:  $\angle COK = 180^\circ - 2\angle OKC = 180^\circ - \angle EKC = 180^\circ - \angle EDC = 72^\circ$  и  $\angle KCB = (180^\circ - \angle ABC)/2 = 36^\circ$ .

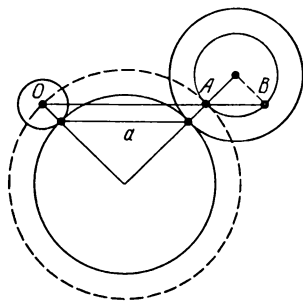


Рис. 68

б) Так как  $BC$  — касательная к описанной окружности треугольника  $CKE$ , то  $BE \cdot BK = BC^2$ , т. е.  $d(d-a) = a^2$ .

6.46. Пусть перпендикуляры, восстановленные к прямой  $AB$  в точках  $A$  и  $B$ , пересекают стороны  $DE$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$ . Любая точка отрезка  $CQ$  является вершиной прямоугольника, вписанного в пятиугольник  $ABCDE$  (стороны этого прямоугольника параллельны  $AB$  и  $AP$ ), причем при перемещении этой точки от  $Q$  к  $C$  отношение длин сторон прямоугольников изменяется от  $AP/AB$  до 0. Так как угол  $AEP$  тупой, то  $AP > AE = AB$ . Поэтому для некоторой точки отрезка  $QC$  отношение длин сторон прямоугольника равно 1.

6.47. Пусть точки  $A_1, \dots, E_1$  симметричны точкам  $A, \dots, E$  относительно центра окружности  $S$ ;  $P, Q$  и  $R$  — точки пересечения прямых  $BC_1$  и  $AB_1$ ,  $AE_1$  и  $BA_1$ ,  $BA_1$  и  $CB_1$  (рис. 69). Тогда  $PQ = AB = a$  и  $QR = b$ . Так как  $PQ \parallel AB$  и  $\angle ABA_1 = 90^\circ$ , то  $PR^2 = PQ^2 + QR^2 = a^2 + b^2$ . Прямая  $PR$  проходит через центр окружности  $S$  и  $\angle AB_1C = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ$ , поэтому  $PR$  — сторона правильного пятиугольника, описанного около окружности с центром  $B_1$ , радиус  $B_1O$  которой равен радиусу окружности  $S$ .

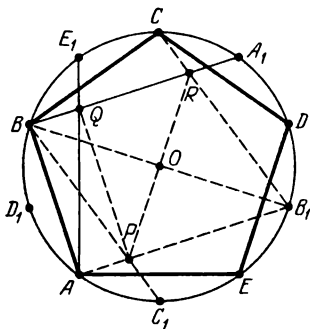


Рис. 69

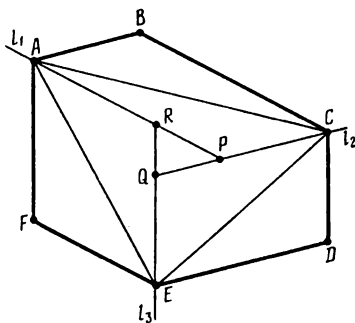


Рис. 70

6.48. Проведем через точки  $A, C$  и  $E$  прямые  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , параллельные прямым  $BC, DE$  и  $FA$  соответственно. Обозначим точки пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2, l_2$  и  $l_3, l_3$  и  $l_1$  через  $P, Q, R$  соответственно (рис. 70). Тогда

$$S_{ACE} = (S_{ABCDE} - S_{PQR})/2 + S_{PQR} = (S_{ABCDE} + S_{PQR})/2 \geq S_{ABCDE}/2.$$

Аналогично  $S_{BDF} = (S_{ABCDE} + S_{P'Q'R'})/2$ . Ясно, что

$$PQ = |AB - DE|, \quad QR = |CD - AF|, \quad PR = |EF - BC|,$$

поэтому треугольники  $PQR$  и  $P'Q'R'$  равны. Следовательно,  $S_{ACE} = S_{BDF}$ .

6.49. Построим треугольник  $PQR$ , как и в предыдущей задаче. Этот треугольник правильный, и

$$PQ = |AB - DE|, \quad QR = |CD - AF|, \quad RP = |EF - BC|.$$

Поэтому  $|AB - DE| = |CD - AF| = |EF - BC|$ .

6.50. Сумма углов при вершинах  $A$ ,  $C$  и  $E$  равна  $360^\circ$ , поэтому из равнобедренных треугольников  $ABF$ ,  $CBD$  и  $EDF$  можно сложить треугольник, приложив  $AB$  к  $CB$ , а  $ED$  и  $EF$  к  $CD$  и  $AF$ . Стороны полученного треугольника равны сторонам треугольника  $BDF$ . Следовательно, при симметрии относительно прямых  $FB$ ,  $BD$  и  $DF$  точки  $A$ ,  $C$  и  $E$  переходят в центр  $O$  описанной окружности треугольника  $BDF$ , а значит,  $AB \parallel OF \parallel DE$ .

6.51. Предположим, что диагонали шестиугольника образуют треугольник  $PQR$ . Обозначим вершины шестиугольника следующим образом: вершина  $A$  лежит на луче  $QP$ ,  $B$  — на  $RP$ ,  $C$  — на  $RQ$  и т. д. Так как прямые  $AD$  и  $BE$  делят площадь шестиугольника пополам, то  $S_{APEF} + S_{PED} = S_{PDCB} + S_{ABP}$  и  $S_{APEF} + S_{ABP} = S_{PDCB} + S_{PED}$ . Поэтому  $S_{ABP} = S_{PED}$ , т. е.

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP = (ER + RP)(DQ + QP) > ER \cdot DQ.$$

Аналогично  $CQ \cdot DQ > AP \cdot FR$  и  $FR \cdot ER > BP \cdot CQ$ . Перемножая эти неравенства, получаем

$$AP \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot FR \cdot ER > ER \cdot DQ \cdot AP \cdot FR \cdot BP \cdot CQ,$$

чего не может быть. Поэтому диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

6.52. Обозначим середины сторон выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  так, как показано на рис. 71. Пусть  $O$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$ . Площади треугольников, на которые делят шестиугольник отрезки, соединяющие точку  $O$  с вершинами и серединами сторон, обозначим так, как показано на том же рисунке. Легко проверить, что  $S_{KONF} = S_{LOMC}$ , т. е.  $a + f = c + d$ . Следовательно, ломаная  $POQ$  делит шестиугольник на две части равной площади, а значит, отрезок  $PQ$  проходит через точку  $O$ .

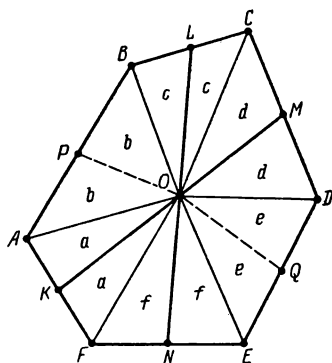


Рис. 71

6.53. а) Пусть  $O$  — центр описанной окружности. Так как  $\angle A_k O A_{k+2} \doteq 360^\circ - 2 \angle A_k A_{k+1} A_{k+2} = \varphi$  — постоянная величина, то при повороте с центром  $O$  на угол  $\varphi$  точка  $A_k$  переходит в  $A_{k+2}$ . Для нечетного  $n$  из этого следует, что все стороны многоугольника  $A_1 \dots A_n$  равны.

б) Пусть  $a$  — длина стороны данного многоугольника. Если одна из его сторон делится точкой касания с вписанной окружностью на отрезки длиной  $x$  и  $a-x$ , то соседние с ней стороны тоже делятся на отрезки длиной  $x$  и  $a-x$  (смежные отрезки соседних сторон равны) и т. д. Для нечетного  $n$  из этого следует, что все стороны многоугольника  $A_1...A_n$  делятся точками касания с вписанной окружностью пополам, а значит, все его углы равны.

**6.54.** Стороны многоугольника  $A_1...A_n$  параллельны сторонам правильного  $n$ -угольника. Отложим на лучах  $OA_1, ..., OA_n$  равные отрезки  $OB_1, ..., OB_n$ . Тогда многоугольник  $B_1...B_n$  правильный и стороны многоугольника  $A_1...A_n$  образуют равные углы с его сторонами. Следовательно,  $OA_1 : OA_2 = OA_2 : OA_3 = ... = OA_n : OA_1 = k$ , т. е.  $OA_1 = kOA_2 = k^2OA_3 = ... = k^nOA_1$ , а значит,  $k = 1$ .

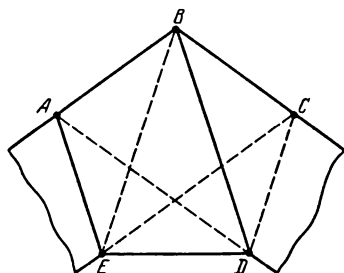


Рис. 72

**6.55.** Обозначим вершины пятиугольника так, как показано на рис. 72. Если в треугольнике две высоты равны, то равны и стороны, на которые опущены эти высоты. Рассматривая треугольники  $EAB$ ,  $ABC$  и  $BCD$ , получаем  $EA = AB$ ,  $AB = BC$  и  $BC = CD$ . Поэтому трапеции  $EABC$  и  $ABCD$  равнобедренные, т. е.  $\angle A = \angle B = \angle C$ . Рассматривая треугольники  $ABD$  и  $BCE$ , получаем  $AD = BD$  и  $BE = CE$ . Так как треугольники  $EAB$ ,  $ABC$ ,  $BCD$

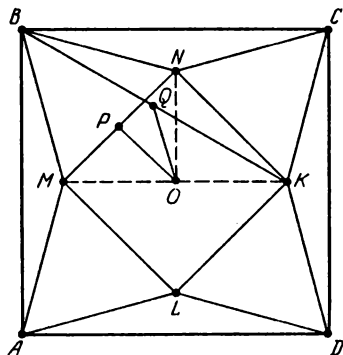


Рис. 73

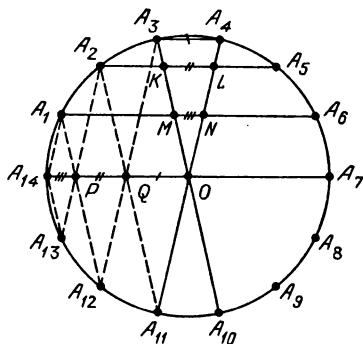


Рис. 74

равны, то  $BE = AC = BD$ . Поэтому  $AD = BE$  и  $BD = CE$ , т. е. трапеции  $ABDE$  и  $CDEB$  равнобедренные. Следовательно,  $ED = AB = BC = CD = AE$  и  $\angle E = \angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ , т. е.  $ABCDE$  — правильный пятиугольник.

**6.56.** Треугольники  $BAM$  и  $BCN$  равнобедренные с углом  $15^\circ$  при основании (см. задачу 2.26), поэтому треугольник  $BMN$  правильный. Пусть  $O$  — центр квадрата,  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $MN$  и  $BK$  (рис. 73). Так как  $OQ$  — средняя линия треугольника  $MBK$ , то  $OQ = BM/2 = MP = OP$  и  $\angle QON = \angle MBA = 15^\circ$ , а значит,  $\angle POQ = \angle PON - \angle QON = 30^\circ$ . Дальнейшее доказательство проводит- ся аналогично.

**6.57.** Рассмотрим правильный двенадцатиугольник  $A_1 \dots A_{12}$ , впи- санный в окружность радиуса  $R$ . Ясно, что  $A_1 A_7 = 2R$ ,  $A_1 A_3 = A_1 A_{11} = R$ . Поэтому  $A_1 A_7 = A_1 A_3 + A_1 A_{11}$ .

**6.58.** Для  $k=3$  решение задачи ясно из рис. 74. В самом деле,  $A_3 A_4 = OQ$ ,  $KL = QP$  и  $MN = PA_{14}$ , поэтому  $A_3 A_4 + KL + MN = OQ + QP + PA_{14} = OA_{14} = R$ . Доказательство проводится аналогично и для любого  $k$ .

**6.59.** Для доказательства достаточно применить результат задач 5.78 и 5.70, б) к треугольнику  $A_a A_c A_e$  и прямым  $A_a A_d$ ,  $A_c A_f$  и  $A_e A_b$ . При решении задачи б) нужно еще заметить, что  $\sin 20^\circ \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = (\sin 40^\circ)/2 = \sin 30^\circ \sin 40^\circ$ , а при решении задачи в) нужно заметить, что  $\sin 10^\circ \sin 80^\circ = \sin 30^\circ \sin 20^\circ$ .

**6.60.** Как и в предыдущей задаче, нужно проверить равенство  $\sin 2\alpha \sin 2\alpha \sin 8\alpha = \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 14\alpha$ , где  $\alpha = 180^\circ/30 = 6^\circ$ . Ясно, что  $\sin 14\alpha = \cos \alpha$ , поэтому  $2 \sin \alpha \sin 3\alpha \sin 14\alpha = \sin 2\alpha \sin 3\alpha$ . Остается про- верить, что  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \sin 8\alpha = \cos 6\alpha - \cos 10\alpha = 1 - 2 \sin^2 3\alpha - 1/2$ , т. е.  $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ = 1$  (см. задачу 5.46).

**6.61.** Пусть сначала  $n=2m$ . Диагонали и стороны правильного  $2m$ -угольника имеют  $m$  различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на  $m-1$  концентрических окружностях (по  $n$  точек на каждой) или в общем центре этих окружностей. Поскольку различные окружности имеют не более двух общих точек, окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содер- жит не более  $1+2(m-1)=2m-1=n-1$  отмеченных точек.

Пусть теперь  $n=2m+1$ . Диагонали и стороны правильного  $(2m+1)$ -угольника имеют  $m$  различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на  $m$  концентрических окружностях (по  $n$  точек на каждой). Окружность, не принадлежащая этому семейству концен- трических окружностей, содержит не более  $2m=n-1$  отмеченных точек.

В обоих случаях наибольшее число отмеченных точек, лежащих на одной окружности, равно  $n$ .

**6.62.** Обозначим центр многоугольника через  $O$ , вершины — через  $A_1, \dots, A_n$ . Предположим, что среди одноцветных многоугольников нет равных, т. е. они имеют  $m=m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k$  сторон соот- ветственно. Рассмотрим преобразование  $f$ , определенное на множестве вершин  $n$ -угольника и переводящее вершину  $A_k$  в вершину  $A_{mk} : f(A_k) = A_{mk}$  (считаем, что  $A_{p+qn} = A_p$ ). При этом преобразовании

вершины правильного  $m$ -угольника переходят в одну точку  $B$ , поэтому сумма векторов  $\overrightarrow{Of(A_i)}$ , где  $A_i$  — вершины  $m$ -угольника, равна  $m\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ .

Поскольку  $\angle A_{m_i}OA_{m_j} = m\angle A_iOA_j$ , вершины любого правильного многоугольника с числом сторон больше  $m$  переходят при рассматриваемом преобразовании в вершины правильного многоугольника. Поэтому и сумма векторов  $\overrightarrow{Of(A_i)}$  по всем вершинам  $n$ -угольника и аналогичные суммы по вершинам  $m_2$ -,  $m_3$ -, ...,  $m_k$ -угольников равны нулю. Получено противоречие с тем, что сумма векторов  $\overrightarrow{Of(A_i)}$  по вершинам  $m$ -угольника не равна нулю. Поэтому среди одноцветных многоугольников найдутся два равных.

**6.63.** Пусть правильный  $(n-1)$ -угольник  $B_1 \dots B_{n-1}$  вписан в правильный  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$ . Можно считать, что  $A_1$  и  $B_1$  — наименее удаленные друг от друга вершины этих многоугольников и точки  $B_2, B_3, B_4$  и  $B_5$  лежат на сторонах  $A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$  и  $A_5A_6$ . Пусть  $\alpha_i = \angle A_{i+1}B_iB_{i+1}$  и  $\beta_i = \angle B_iB_{i+1}A_{i+1}$ , где  $i=1, 2, 3, 4$ . По теореме синусов  $A_2B_2 : B_1B_2 = \sin \alpha_1 : \sin \varphi$  и  $B_2A_3 : B_2B_3 = \sin \beta_2 : \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол при вершине правильного  $n$ -угольника. Следовательно,  $\sin \alpha_1 + \sin \beta_2 = a_n \sin \varphi / a_{n-1}$ , где  $a_n$  и  $a_{n-1}$  — стороны данных многоугольников. Аналогичные рассуждения показывают, что  $\sin \alpha_1 + \sin \beta_2 = \sin \alpha_2 + \sin \beta_3 = \sin \alpha_3 + \sin \beta_4$ . Заметим теперь, что  $\sin \alpha_i + \sin \beta_{i+1} = 2 \sin ((\alpha_i + \beta_{i+1})/2) \cos ((\alpha_i - \beta_{i+1})/2)$ , и займемся вычислением  $\alpha_i + \beta_{i+1}$  и  $\alpha_i - \beta_{i+1}$ . Так как  $\alpha_i + \beta_i = 2\pi/n$  и  $\alpha_{i+1} + \beta_i = 2\pi/(n-1)$ , то  $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 2\pi/(n(n-1))$  и  $\beta_{i+1} = \beta_i - 2\pi/(n(n-1))$ , а значит,  $\alpha_i + \beta_{i+1} = \frac{2\pi}{n} -$

$-\frac{2\pi}{n(n-1)}$  — величина постоянная и  $\alpha_i - \beta_{i+1} = \alpha_{i-1} - \beta_i + 4\pi/(n(n-1))$ .

Следовательно,  $\cos \theta = \cos (\theta + 2\pi/n(n-1)) = \cos (\theta + 4\pi/(n-1)n)$  для  $\theta = (\alpha_1 - \beta_2)/2$ . Получено противоречие, так как на интервале, меньшем  $2\pi$ , косинус не может принимать одно значение в трех различных точках.

**З а м е ч а н и е.** В правильный пятиугольник квадрат вписать можно (см. задачу 6.46).

**6.64.** Пусть  $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ . При повороте вокруг точки  $O$  на угол  $360^\circ/n$  точка  $A_i$  переходит в  $A_{i+1}$ , а значит, вектор  $\vec{a}$  переходит в себя, т. е.  $\vec{a} = \vec{0}$ .

Так как  $\overrightarrow{XA_i} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_i}$  и  $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ , то  $\overrightarrow{XA_1} + \dots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XO}$ .

**6.65.** Проведем через центр правильного многоугольника  $A_1 \dots A_n$  прямую  $l$ , не проходящую через его вершины. Пусть  $x_i$  равно проекции вектора  $\overrightarrow{OA_i}$  на прямую, перпендикулярную прямой  $l$ . Тогда все  $x_i$  отличны от нуля и сумма чисел  $x_i$ , стоящих в вершинах правильного  $k$ -угольника, равна нулю, поскольку равна нулю соответствующая сумма векторов  $\overrightarrow{OA_i}$  (см. задачу 6.64).

**6.66.** Согласно задаче 6.64  $a = 10 \overrightarrow{AO}$  и  $b = 10 \overrightarrow{BO}$ , где  $O$  — центр многоугольника  $X_1 \dots X_{10}$ . Ясно, что если точка  $A$  расположена очень близко к вершине многоугольника, а точка  $B$  — очень близко к середине стороны, то  $AO > BO$ .

**6.67.** Так как

$$A_i X^2 = |\overrightarrow{A_i O} + \overrightarrow{OX}|^2 = A_i O^2 + OX^2 + 2(\overrightarrow{A_i O}, \overrightarrow{OX}) = R^2 + d^2 + 2(\overrightarrow{A_i O}, \overrightarrow{OX}),$$

то  $\sum A_i X^2 = n(R^2 + d^2) + 2(\sum \overrightarrow{A_i O}, \overrightarrow{OX}) = n(R^2 + d^2)$  (см. задачу 6.64).

**6.68.** Обозначим через  $S_k$  сумму квадратов расстояний от вершины  $A_k$  до всех остальных вершин. Тогда

$$\begin{aligned} S_k &= A_k A_1^2 + A_k A_2^2 + \dots + A_k A_n^2 = \\ &= A_k O^2 + 2(\overrightarrow{A_k O}, \overrightarrow{OA_1}) + A_1 O^2 + \dots + A_k O^2 + 2(\overrightarrow{A_k O}, \overrightarrow{OA_n}) + A_n O^2 = \\ &= 2nR^2, \end{aligned}$$

так как  $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$ . Поэтому  $\sum_{k=1}^n S_k = 2n^2 R^2$ . Поскольку квадрат каждой из сторон и диагоналей дважды входит в эту сумму, искомая сумма равна  $n^2 R^2$ .

**6.69.** Пусть  $X_k$  — образ точки  $X$  при повороте относительно центра  $O$  данного  $n$ -угольника, переводящем  $A_k$  в  $A_1$ . При этом повороте отрезок  $A_k X$  переходит в  $A_1 X_k$ . Следовательно,  $A_1 X + \dots + A_n X = A_1 X_1 + \dots + A_1 X_n$ . А так как  $n$ -угольник  $X_1 \dots X_n$  правильный, то  $\overrightarrow{A_1 X_1} + \dots + \overrightarrow{A_1 X_n} = n \overrightarrow{A_1 O}$  (см. задачу 6.64), а значит,  $A_1 X_1 + \dots + A_n X_n \geq n A_1 O$ .

**6.70.** Пусть  $B_i$  — проекция точки  $X$  на прямую  $OA_i$ . Тогда  $(e_i, x) = (\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{B_i X}) = (\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OB_i}) = \pm R \cdot OB_i$ . Точки  $B_1, \dots, B_n$  лежат на окружности с диаметром  $OX$  и являются вершинами правильного  $n$ -угольника при  $n$  нечетном и вершинами  $n/2$ -угольника, взятыми по два раза, при  $n$  четном (см. задачу 2.9). Поэтому  $\sum OB_i^2 = n OX^2 / 2$  (см. задачу 6.67).



6.71. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — векторы, идущие из центра данного  $n$ -угольника в его вершины;  $x$  — единичный вектор, перпендикулярный прямой  $l$ . Искомая сумма равна  $\sum (e_i, x)^2 = nR^2/2$  (см. задачу 6.70).

6.72. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — единичные векторы, направленные из центра  $O$  правильного  $n$ -угольника в середины его сторон;  $x = \overrightarrow{OX}$ . Тогда расстояние от точки  $X$  до  $i$ -й стороны равно  $|(x, e_i) - r|$ . Поэтому искомая сумма равна  $\sum ((x, e_i)^2 - 2r(x, e_i) + r^2) = \sum (x, e_i)^2 + nr^2$ . Согласно задаче 6.70  $\sum (x, e_i)^2 = nd^2/2$ .

6.73. Пусть  $x$  — единичный вектор, параллельный прямой  $l$ ,  $e_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ . Тогда квадрат длины проекции стороны  $A_i A_{i+1}$  на прямую  $l$  равен  $(x, e_i)^2$ . Согласно задаче 6.70  $\sum (x, e_i)^2 = na^2/2$ .

6.74. Пусть  $a = \overrightarrow{XO}$ ,  $e_i = \overrightarrow{OA_i}$ . Тогда  $XA_i^4 = |a + e_i|^4 = (|a|^2 + 2(a, e_i) + |e_i|^2)^2 = 4(R^2 + (a, e_i))^2 = 4(R^4 + 2R^2(a, e_i) + (a, e_i)^2)$ . Ясно, что  $\sum (a, e_i) = (a, \sum e_i) = 0$ . Согласно задаче 6.70  $\sum (a, e_i)^2 = nR^4/2$ , поэтому искомая сумма равна  $4(nR^4 + nR^4/2) = 6nR^4$ .

6.75. а) Докажем сначала требуемое соотношение для  $u = e_1$ . Пусть  $e_i = (\sin \varphi_i, \cos \varphi_i)$ , причем  $\cos \varphi_1 = 1$ . Тогда  $\sum (e_1, e_i) e_i = \sum \cos \varphi_i e_i = \sum (\sin \varphi_i \cos \varphi_i, \cos^2 \varphi_i) = \sum ((\sin 2\varphi_i)/2, (1 + \cos 2\varphi_i)/2) = (0, n/2) = ne_1/2$ . Для  $u = e_2$  доказательство проводится аналогично. Остается заметить, что любой вектор  $u$  можно представить в виде  $u = \lambda e_1 + \mu e_2$ .

б) Пусть  $B_1, \dots, B_n$  — середины сторон данного многоугольника,  $e_i = \overrightarrow{OB_i}/OB_i$ ,  $u = \overrightarrow{XO}$ . Тогда  $\overrightarrow{XA_i} = \overrightarrow{OB_i} + (u, e_i)e_i$ . А так как  $\sum \overrightarrow{OB_i} = \vec{0}$ , то  $\sum \overrightarrow{XA_i} = \sum (u, e_i)e_i = nu/2 = n\overrightarrow{XO}/2$ .

6.76. Пусть  $e_0, \dots, e_{n-1}$  — векторы сторон правильного  $n$ -угольника. Достаточно доказать, что, переупорядочив эти векторы, можно получить такой набор векторов  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , что  $\sum_{k=1}^n ka_k = \vec{0}$ . Число  $n$ , не являющееся степенью простого числа, можно представить в виде  $n = pq$ , где  $p$  и  $q$  — взаимно простые числа. Докажем теперь, что набор  $\{e_0, e_p, \dots, e_{(q-1)p}; e_q, e_{q+p}, \dots, e_{q+(q-1)p}, \dots; e_{(p-1)q}, e_{(p-1)q+p}, \dots, e_{(p-1)q+(q-1)p}\}$  искомый. Заметим сначала, что если  $x_1q + y_1p \equiv x_2q + y_2p \pmod{pq}$ , то  $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$  и  $y_1 \equiv y_2 \pmod{q}$ , поэтому в рассматриваемом наборе каждый из векторов  $e_0, \dots, e_{n-1}$  встречается ровно один раз.

Концы векторов  $e_q, e_{q+p}, \dots, e_{q+(q-1)p}$  с общим началом образуют правильный  $q$ -угольник, поэтому их сумма равна нулю. Кроме того, векторы  $e_0, e_p, \dots, e_{(q-1)p}$  переходят в  $e_q, e_{q+p}, \dots, e_{q+(p-1)q}$  при повороте на угол  $\varphi = 2\pi/p$ . Поэтому если  $e_0 + 2e_p + \dots + qe_{(q-1)p} = b$ ,

то  $(q+1)e_q + (q+2)e_{q+p} + \dots + 2qe_{q+(q-1)p} = q(e_q + \dots + e_{q+(q-1)p}) + e_q + 2e_{q+p} + \dots + qe_{q+(q-1)p} = R^\varphi b$ , где  $R^\varphi b$  — вектор, полученный из вектора  $b$  поворотом на угол  $\varphi = 2\pi/p$ . Аналогичные рассуждения показывают, что для рассматриваемого набора векторов  $\sum_{k=1}^n ka_k = b + R^\varphi b + \dots + R^{(p-1)\varphi} b = 0$ .

**6.77.** Предположим, что на сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены квадраты  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_2B_2$ ,  $ACC_3A_3$  и вершины  $A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3$  лежат на одной окружности  $S$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3$  проходят через центр окружности  $S$ . Ясно, что серединные перпендикуляры к отрезкам  $A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3$  совпадают с серединными перпендикулярами к сторонам треугольника  $ABC$ , поэтому центр окружности  $S$  совпадает с центром описанной окружности треугольника.

Обозначим центр описанной окружности треугольника  $ABC$  через  $O$ . Расстояние от точки  $O$  до прямой  $B_2C_2$  равно  $R \cos A + 2R \sin A$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ . Поэтому  $OB_2^2 = (R \sin A)^2 + (R \cos A + 2R \sin A)^2 = R^2(3 + 2(\sin 2A - \cos 2A)) = R^2(3 - 2\sqrt{2} \cos(45^\circ + 2A))$ . Ясно, что для того, чтобы треугольник обладал требуемым свойством, необходимо и достаточно, чтобы  $OB_2^2 = OC_3^2 = OA_1^2$ , т. е.  $\cos(45^\circ + 2\angle A) = \cos(45^\circ + 2\angle B) = \cos(45^\circ + 2\angle C)$ . Это равенство выполняется при  $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ . Если же  $\angle A \neq \angle B$ , то  $(45^\circ + 2\angle A) + (45^\circ + 2\angle B) = 360^\circ$ , т. е.  $\angle A + \angle B = 135^\circ$ . Тогда  $\angle C = 45^\circ$  и  $\angle A = \angle C = 45^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$  (или  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ). Мы видим, что треугольник должен быть либо равносторонним, либо равнобедренным прямоугольным.

**6.78.** В любом треугольнике выполнено соотношение  $h_c = ab/2R$  (задача 12.33), поэтому  $p_k = MA_k \cdot MA_{k+1}/2R$ . Следовательно,

$$p_1 p_3 \dots p_{2n-1} = MA_1 \cdot MA_2 \dots MA_{2n} / (2R)^n = p_2 p_4 \dots p_{2n}.$$

**6.79.** Пусть  $ABC$  — треугольник, вписанный в окружность  $S$ . Обозначим расстояния от центра  $O$  окружности до сторон  $BC, CA$  и  $AB$  через  $a, b$  и  $c$  соответственно. Тогда  $R+r=a+b+c$ , если точка  $O$  лежит внутри треугольника  $ABC$ , и  $R+r=-a+b+c$ , если точки  $O$  и  $A$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$  (см. задачу 12.38).

Каждая из диагоналей разбиения принадлежит двум треугольникам разбиения. Для одного из этих треугольников точка  $O$  и оставшаяся вершина лежат по одну сторону от диагонали, для другого — по разные стороны. Разбиение  $n$ -угольника непересекающимися диагоналями на треугольники состоит из  $n-2$  треугольников. Поэтому сумма  $(n-2)R + r_1 + \dots + r_{n-2}$  равна сумме расстояний от точки  $O$  до сторон  $n$ -угольника (расстояния до сторон берутся с соответствующими знаками). Из этого видно, что сумма  $r_1 + \dots + r_{n-2}$  не зависит от разбиения.

**6.80.** Пусть многоугольник  $A_1 \dots A_n$  вписан в окружность. Рассмотрим точку  $A'_2$ , симметричную точке  $A_2$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $A_1 A_3$ . Тогда многоугольник  $A_1 A'_2 A_3 \dots A_n$  вписанный и его площадь равна площади многоугольника  $A_1 \dots A_n$ . Таким образом можно поменять местами любые две соседние стороны, а значит, можно поменять местами любые две стороны. Поэтому к любой стороне можно «подогнать» любую другую сторону, к ней — любую из оставшихся и т. д. Следовательно, площадь  $n$ -угольника, вписанного в данную окружность, зависит только от набора длин сторон, но не от их порядка.

**6.81.** Без ограничения общности можно считать, что  $a_n$  — наибольшее из чисел  $a_1, \dots, a_n$ . Пусть  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$  вписан в окружность с центром  $O$ . Тогда  $A_i A_{i+1} : A_1 A_n = \sin(\angle A_i O A_{i+1}/2) : \sin(\angle A_1 O A_n/2)$ . Поэтому поступим следующим образом. Из соотношения  $\sin(\varphi_i/2) : \sin(\varphi/2) = a_i : a_n$  угол  $\varphi_i$  однозначно выражается через  $\varphi$ , если  $\varphi_i < \pi$ . На окружности радиуса 1 фиксируем точку  $A_n$  и рассмотрим такие переменные точки  $A_1, \dots, A_{n-1}, A'_n$ , что  $\sphericalangle A_n A_1 = \varphi$ ,  $\sphericalangle A_1 A_2 = \varphi_1, \dots, \sphericalangle A_{n-2} A_{n-1} = \varphi_{n-2}$  и  $\sphericalangle A_{n-1} A'_n = \varphi_{n-1}$ , причем расположим эти точки двумя различными способами, изображенными на рис. 75 (первый способ (рис. 75, а) будет соответствовать  $n$ -угольнику, содержащему центр окружности, а второй (рис. 75, б) — не содержащему). Остается

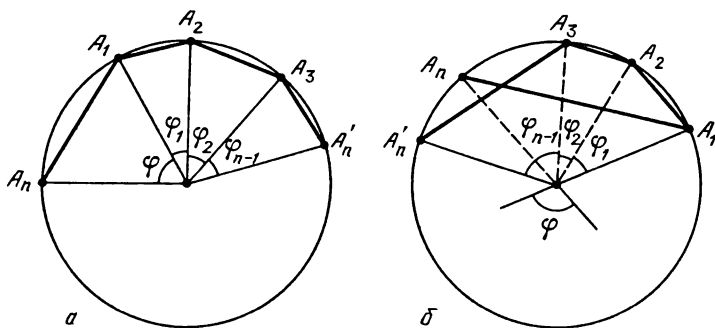


Рис. 75

доказать, что при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\pi$  в одном из этих случаев точка  $A'_n$  совпадает с  $A_n$  (в самом деле, тогда с точностью до подобия получается искомым  $n$ -угольник). Предположим, что в первом случае при  $0 \leq \varphi \leq \pi$  точки  $A'_n$  и  $A_n$  никогда не совпадают, т. е. при  $\varphi = \pi$  выполняется неравенство  $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} < \pi$ . Рис. 75, б требует некоторых комментариев: при малых углах  $\sin \alpha \approx \alpha$ , поэтому из условия задачи следует, что при малых углах точка  $A_n$  действительно лежит на дуге  $A_1 A'_n$ , так как  $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} > \varphi$ . Итак, при малых углах  $\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} > \varphi$ , а если  $\varphi = \pi$ , то согласно предположению

$\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1} < \pi = \varphi$ . Поэтому в некоторый момент  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}$ , т. е. точки  $A_n$  и  $A'_n$  совпадают.

**6.82.** Пусть  $h_1, \dots, h_n$  — расстояния от данной точки до соответствующих сторон,  $a_1, \dots, a_n$  — расстояния от вершин многоугольника до точек касания. Тогда произведение площадей как красных, так и синих треугольников равно  $a_1 \dots a_n h_1 \dots h_n / 2^n$ .

**6.83.** Пусть  $OH_i$  — высота треугольника  $OA_i A_{i+1}$ . Тогда  $\angle H_{i-1} O A_i = \angle H_i O A_i = \varphi_i$ . Из условия задачи следует, что  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}$ ,  $\varphi_{n+2} + \varphi_{n+3} = \varphi_2 + \varphi_3$ ,  $\varphi_3 + \varphi_4 = \varphi_{n+3} + \varphi_{n+4}$ , ...  $\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = \varphi_{2n-2} + \varphi_{2n-1}$  (при записи последнего равенства мы учли, что  $n$  нечетно) и  $\varphi_{n-1} + 2\varphi_n + \varphi_{n+1} = \varphi_{2n-1} + 2\varphi_{2n} + \varphi_1$ . Складывая все эти равенства, получаем  $\varphi_{n-1} + \varphi_n = \varphi_{2n-1} + \varphi_{2n}$ , что и требовалось.

**6.84.** Пусть  $O$  — центр данной окружности. Тогда  $\overrightarrow{XA_i} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_i}$ , а значит,  $XA_i^2 = XO^2 + OA_i^2 + 2(\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{OA_i}) = d^2 + r^2 + 2(\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{OA_i})$ . Так как  $a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$  (см. задачу 13.4), то  $a_1 XA_1^2 + \dots + a_n XA_n^2 = (a_1 + \dots + a_n)(d^2 + r^2)$ .

**6.85.** Согласно задаче 5.8  $b_{i-1} b_i / a_i^2 = \sin^2(A_i / 2)$ . Для решения задачи а) достаточно перемножить все такие равенства, а для решения задачи б) произведение равенств с четным индексом  $i$  нужно поделить на произведение равенств с нечетным индексом  $i$ .

**6.86.** Пусть  $BC$  — синяя сторона,  $AB$  и  $CD$  — соседние с  $BC$  стороны. По условию стороны  $AB$  и  $CD$  красные. Предположим, что многоугольник описанный;  $P, Q, R$  — точки касания сторон  $AB, BC, CD$  с вписанной окружностью. Ясно, что  $BP = BQ, CR = CQ$  и отрезки  $BP, CR$  граничат только с одним синим отрезком. Поэтому сумма длин красных сторон не меньше суммы длин синих сторон. Получено противоречие с тем, что сумма длин красных сторон меньше половины периметра. Поэтому в многоугольник нельзя вписать окружность.

**6.87.** Пусть выпуклый  $n$ -угольник имеет  $k$  острых углов. Тогда сумма его углов меньше  $k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 180^\circ$ . С другой стороны, сумма углов  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Поэтому  $(n-2) \cdot 180^\circ < k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 180^\circ$ , т. е.  $k < 4$ . Поскольку  $k$  — целое число,  $k \leq 3$ .

Для любого  $n \geq 3$  существует выпуклый  $n$ -угольник с тремя острыми углами (рис. 76).

**6.88.** Предположим, что несмежные стороны  $AB$  и  $CD$  равны по длине наибольшей диагонали. Тогда  $AB + CD \geq AC + BD$ . Но согласно задаче 9.14  $AB + CD < AC + BD$ . Получено противоречие, поэтому стороны, равные по длине наибольшей диагонали, должны быть смежными, т. е. таких сторон не больше двух.

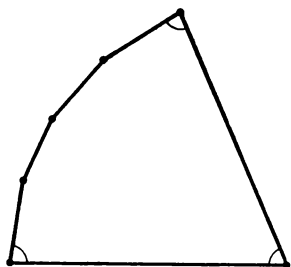


Рис. 76

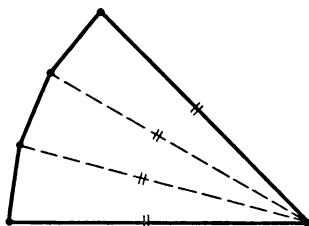


Рис. 77

Пример многоугольника с двумя сторонами, равными по длине наибольшей диагонали, приведен на рис. 77. Ясно, что такой  $n$ -угольник существует при любом  $n > 3$ .

**6.89.** Докажем, что  $n \leq 5$ . Пусть  $AB = 1$ , а  $C$  — вершина, не соседняя ни с  $A$ , ни с  $B$ . Тогда  $|AC - BC| < AB = 1$ . Поэтому  $AC = BC$ , т. е. точка  $C$  лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $AB$ . Таким образом, кроме вершин  $A, B, C$  многоугольник может иметь еще лишь две вершины.

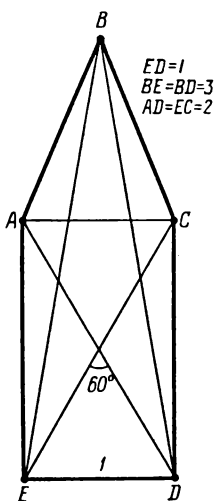


Рис. 78

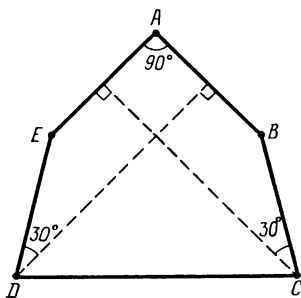


Рис. 79

Пример пятиугольника, обладающего требуемым свойством, приведен на рис. 78. Поясним, как он устроен.  $ACDE$  — прямоугольник,  $AC = ED = 1$  и  $\angle CAD = 60^\circ$ . Точка  $B$  задается условием  $BE = BD = 3$ .

Примером четырехугольника, обладающего требуемым свойством, является прямоугольник  $ACDE$  на том же рисунке.

**6.90.** Пример пятиугольника, удовлетворяющего условию задачи, приведен на рис. 79. Поясним, как он устроен. Возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник  $EAB$ , проведем серединные

перпендикуляры к сторонам  $EA$ ,  $AB$  и на них построим точки  $C$  и  $D$  так, что  $ED=BC=AB$  (т. е. прямые  $BC$  и  $ED$  образуют с соответствующими серединными перпендикулярами углы в  $30^\circ$ ). Ясно, что  $DE=BC=AB=EA < EB < DC$  и  $DB=DA=CA=CE > EB$ .

Докажем теперь, что пятая сторона и пятая диагональ не могут иметь общей точки. Предположим, что пятая сторона  $AB$  имеет общую точку  $A$  с пятой диагональю. Тогда пятая диагональ — это  $AC$  или  $AD$ . Разберем эти два случая.

В первом случае  $\triangle AED = \triangle CDE$ , поэтому при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $ED$  точка  $A$  переходит в точку  $C$ . Точка  $B$  при этой симметрии остается на месте, так как  $BE=BD$ . Поэтому отрезок  $AB$  переходит в  $CB$ , т. е.  $AB=CB$ . Получено противоречие.

Во втором случае  $\triangle ACE = \triangle EBD$ , поэтому при симметрии относительно биссектрисы угла  $AED$  отрезок  $AB$  переходит в  $DC$ , т. е.  $AB=CD$ . Получено противоречие.

**6.91.** Рассмотрим две соседние вершины  $A_1$  и  $A_2$ . Если  $\angle A_1OA_2 \geq 90^\circ$ , то  $OA_1=OA_2$ , так как к основанию равнобедренного треугольника не может прилежать прямой или тупой угол.

Пусть теперь  $\angle A_1OA_2 < 90^\circ$ . Проведем через точку  $O$  прямые  $l_1$  и  $l_2$ , перпендикулярные прямым  $OA_1$  и  $OA_2$ . Обозначим области, на которые эти прямые разбивают плоскость, так, как показано на рис. 80. Если в области ③ есть вершина  $A_k$ , то  $A_1O=A_kO=A_2O$ , поскольку  $\angle A_1OA_k \geq 90^\circ$  и  $\angle A_2OA_k \geq 90^\circ$ . Если же в области ③ нет вершин многоугольника, то в области ① есть вершина  $A_p$  и в области ② есть вершина  $A_q$ . (Если бы в одной из областей ①, ② не было вершин многоугольника, то точка  $O$  оказалась бы вне многоугольника.) Так как  $\angle A_1OA_q \geq 90^\circ$ ,  $\angle A_2OA_p \geq 90^\circ$  и  $\angle A_pOA_q \geq 90^\circ$ , то  $A_1O=A_qO=A_pO=A_2O$ .

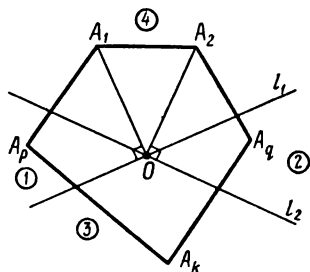


Рис. 80

Остается заметить, что если расстояния от точки  $O$  до любой пары соседних вершин многоугольника равны, то равны и все расстояния от точки  $O$  до вершин многоугольника.

**6.92.** Будем доказывать, что если  $A, B, C, D, E, F$  — точки на окружности, расположенные в произвольном порядке, причем прямые  $AB$  и  $DE$  пересекаются в точке  $G$ ,  $BC$  и  $EF$  — в точке  $H$ ,  $CD$  и  $FA$  — в точке  $K$ , то точки  $G, H$  и  $K$  лежат на одной прямой.

Пусть  $a, b, \dots, f$  — ориентированные углы между некоторой фиксированной прямой и прямыми  $OA, OB, \dots, OF$ , где  $O$  — центр описанной окружности шестиугольника. Тогда

$\angle (AB, DE) = (a+b-d-e)/2$ ,  $\angle (CD, FA) = (c+d-f-a)/2$  и  $\angle (EF, BC) = (e+f-b-c)/2$ , поэтому сумма этих углов равна  $0^\circ$ .

Пусть  $Z$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $BDG$  и  $DFK$ . Докажем, что точки  $B, F, Z$  и  $H$  лежат на одной окружности. Для этого нужно проверить, что  $\angle (BZ, ZF) = \angle (BH, HF)$ . Ясно, что  $\angle (BZ, ZF) = \angle (BZ, ZD) + \angle (DZ, ZF)$ , а  $\angle (BZ, ZD) = \angle (BG, GD) = \angle (AB, DE)$ ,  $\angle (DZ, ZF) = \angle (DK, KF) = \angle (CD, FA)$  и, как только что было доказано,  $\angle (AB, DE) + \angle (CD, FA) = -\angle (EF, BC) = \angle (BC, EF) = \angle (BH, HF)$ .

Докажем теперь, что точки  $H, Z$  и  $G$  лежат на одной прямой. Для этого достаточно проверить, что  $\angle (GZ, ZB) = \angle (HZ, ZB)$ . Ясно, что  $\angle (GZ, ZB) = \angle (GD, DB) = \angle (ED, DB)$ ,  $\angle (HZ, ZB) = \angle (HF, FB) = \angle (ED, DB)$ . Аналогично доказывается, что точки  $K, Z$  и  $G$  лежат на одной прямой:  $\angle (DZ, ZG) = \angle (DB, BG) = \angle (DB, BA)$  и  $\angle (DZ, ZK) = \angle (DF, FK) = \angle (DB, BA)$ . Мы получили, что точки  $H$  и  $K$  лежат на прямой  $GZ$ , поэтому точки  $G, H$  и  $K$  лежат на одной прямой.

**6.93.** Пусть  $A_2, B_2$  и  $C_2$  — указанные точки пересечения прямых. Применяя теорему Паскаля к точкам  $M, A_1, A, C, B, B_1$ , получаем, что точки  $A_2, B_2$  и  $R$  лежат на одной прямой. Аналогично точки  $A_2, C_2$  и  $R$  лежат на одной прямой. Следовательно, точки  $A_2, B_2, C_2$  и  $R$  лежат на одной прямой.

**6.94.** Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности  $S$  с диаметром  $AB$ . Пусть  $A_4$  и  $B_4$  — точки пересечения прямых  $AA_2$  и  $BB_2$  с прямой  $A_3B_3$ . Согласно задаче 2.41,а) эти точки лежат на окружности  $S$ . Прямые  $A_1B$  и  $A_4A$  пересекаются в точке  $A_2$ , а прямые  $BB_4$  и  $AB_1$  — в точке  $B_2$ . Поэтому, применяя теорему Паскаля к точкам  $B_1, A_1, B, B_4, A_4, A$ , получаем, что точка пересечения прямых  $B_1A_1$  и  $B_4A_4$  (последняя прямая совпадает с  $A_3B_3$ ) лежит на прямой  $A_2B_2$ .

**6.95.** Пусть  $K$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $MN$ . Применяя теорему Паскаля к точкам  $A, M, N, D, C, B$ , получаем, что точки  $E, K$  и  $F$  лежат на одной прямой, а значит,  $K$  — точка пересечения прямых  $MN$  и  $EF$ .

**6.96.** Пусть лучи  $PA$  и  $QA$  пересекают окружность в точках  $P_2$  и  $Q_2$ , т. е.  $P_1P_2$  и  $Q_1Q_2$  — диаметры данной окружности. Применим теорему Паскаля к шестиугольнику  $PP_2P_1QQ_2Q_1$ . Прямые  $PP_2$  и  $QQ_2$  пересекаются в точке  $A$ , а прямые  $P_1P_2$  и  $Q_1Q_2$  пересекаются в точке  $O$ , поэтому точка пересечения прямых  $P_1Q$  и  $Q_1P$  лежит на прямой  $AO$ .

**6.97.** Пусть данные точки  $A, B, C, D, E$  лежат на одной окружности. Предположим, что мы построили точку  $F$  той же окружности. Обозначим через  $K, L, M$  точки пересечения прямых  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$  соответственно. Тогда по теореме Паскаля точки  $K, L, M$  лежат на одной прямой.

Из этого вытекает следующее построение. Проведем через точку  $E$  произвольную прямую  $a$  и обозначим точку ее пересечения с прямой

$BC$  через  $L$ . Затем построим точку  $K$  пересечения прямых  $AB$  и  $DE$  и точку  $M$  пересечения прямых  $KL$  и  $CD$ . Наконец,  $F$ —точка пересечения прямых  $AM$  и  $a$ . Докажем, что  $F$  лежит на нашей окружности. Пусть  $F_1$ —точка пересечения окружности и прямой  $a$ . Из теоремы Паскаля следует, что  $F_1$  лежит на прямой  $AM$ , т. е.  $F_1$  является точкой пересечения  $a$  и  $AM$ . Поэтому  $F_1 = F$ .

**6.98.** Пусть  $P$  и  $Q$ —точки пересечения прямой  $A_3A_4$  с  $A_1A_2$  и  $A_1A_6$ , а  $R$  и  $S$ —точки пересечения прямой  $A_4A_5$  с  $A_1A_6$  и  $A_1A_2$ . Тогда  $A_2K:A_3L=A_2P:A_3P$ ,  $A_3L:A_6M=A_3Q:A_6Q$  и  $A_6M:A_5N=A_6R:A_5R$ . Поэтому требуемое соотношение  $A_2K:A_5N=A_2S:A_5S$  переписывается в виде

$$\frac{A_2P}{A_3P} \cdot \frac{A_3Q}{A_6Q} \cdot \frac{A_6R}{A_5R} \cdot \frac{A_5S}{A_2S} = 1.$$

Пусть  $T$ —точка пересечения прямых  $A_2A_3$  и  $A_5A_6$ ; по теореме Паскаля точки  $S$ ,  $Q$  и  $T$  лежат на одной прямой. Применяя теорему Менелая (см. задачу 5.58) к треугольнику  $PQS$  и точкам  $T$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , а также к треугольнику  $RQS$  и точкам  $T$ ,  $A_5$  и  $A_6$ , получаем

$$\frac{A_2P}{A_2S} \cdot \frac{A_3Q}{A_3P} \cdot \frac{TS}{TQ} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{TQ}{TS} \cdot \frac{A_5S}{A_5R} \cdot \frac{A_6R}{A_6Q} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем требуемое. (Отношения отрезков следует считать ориентированными.)



## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

---

### Основные сведения

1. Геометрическое место точек (сокращенно ГМТ), обладающих некоторым свойством,— это фигура, состоящая из всех точек, для которых выполнено это свойство.

2. Решение задачи на поиск ГМТ должно содержать доказательство того, что

а) точки, обладающие требуемым свойством, принадлежат фигуре  $\Phi$ , являющийся ответом задачи;

б) все точки фигуры  $\Phi$  обладают требуемым свойством.

3. ГМТ, обладающих двумя свойствами, является пересечением (т. е. общей частью) двух фигур: ГМТ, обладающих первым свойством, и ГМТ, обладающих вторым свойством.

4. Три важнейших ГМТ:

а) ГМТ, равноудаленных от точек  $A$  и  $B$ , является серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ ;

б) ГМТ, удаленных на расстояние  $R$  от данной точки  $O$ , является окружностью радиуса  $R$  с центром  $O$ ;

в) ГМТ, из которых данный отрезок  $AB$  виден под данным углом, является объединением двух дуг окружностей, симметричных относительно прямой  $AB$  (точки  $A$  и  $B$  не принадлежат ГМТ).

### Вводные задачи

1. а) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых.

б) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

2. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

3. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите ГМТ  $X$ , удовлетворяющих неравенствам  $AX \leq BX \leq CX$ .

4. Найдите геометрическое место таких точек  $X$ , что касательные, проведенные из  $X$  к данной окружности, имеют данную длину.

5. На окружности фиксирована точка  $A$ . Найдите ГМТ  $X$ , делящих хорды с концом  $A$  в отношении  $1:2$ , считая от точки  $A$ .

## § 1. ГМТ — прямая или отрезок

7.1. Два колеса радиусов  $r_1$  и  $r_2$  катаются по прямой  $l$ . Найдите множество точек пересечения  $M$  их общих внутренних касательных.

7.2. Стороны  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  площади  $S$  не параллельны. Найдите ГМТ  $X$ , лежащих внутри четырехугольника, для которых  $S_{ABX} + S_{CDX} = S/2$ .

7.3. Даны две прямые, пересекающиеся в точке  $O$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых сумма длин проекций отрезков  $OX$  на эти прямые постоянна.

7.4. Дан прямоугольник  $ABCD$ . Найдите ГМТ  $X$ , для которых  $AX + BX = CX + DX$ .

7.5. Найдите геометрическое место точек  $M$ , лежащих внутри ромба  $ABCD$  и обладающих тем свойством, что  $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$ .

\* \* \*

7.6. На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ . Найдите ГМТ  $M$ , для которых разность квадратов длин отрезков  $AM$  и  $BM$  постоянна.

7.7. Даны окружность  $S$  и точка  $M$  вне ее. Через точку  $M$  проводятся всевозможные окружности  $S_1$ , пересекающие окружность  $S$ ;  $X$  — точка пересечения касательной в точке  $M$  к окружности  $S_1$  с продолжением общей хорды окружностей  $S$  и  $S_1$ . Найдите ГМТ  $X$ .

7.8. Даны две непересекающиеся окружности. Найдите геометрическое место точек центров окружностей, делящих пополам данные окружности (т. е. пересекающих их в диаметрально противоположных точках).

7.9. Внутри окружности взята точка  $A$ . Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности, проведенных через концы всевозможных хорд, содержащих точку  $A$ .

7.10. а) Дан параллелограмм  $ABCD$ . Докажите, что величина  $AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2$  не зависит от выбора точки  $X$ .

б) Четырехугольник  $ABCD$  не является параллелограммом. Докажите, что все точки  $X$ , удовлетворяющие соотношению  $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$ , лежат на одной прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему середины диагоналей.

См. также задачи 6.14, 15.14.

## § 2. ГМТ — окружность или дуга окружности

7.11. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла  $ABC$ . По какой траектории движется середина этого отрезка?

7.12. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

7.13. Даны две точки  $A$  и  $B$ . Две окружности касаются прямой  $AB$  (одна — в точке  $A$ , другая — в точке  $B$ ) и касаются друг друга в точке  $M$ . Найдите ГМТ  $M$ .

\* \* \*

7.14. На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$ . Найдите ГМТ  $M$ , для которых  $AM:BM=k$  (окружность Аполлония).

7.15. Пусть  $S$  — окружность Аполлония для точек  $A$  и  $B$ , причем точка  $A$  лежит вне окружности  $S$ . Из точки  $A$  проведены касательные  $AP$  и  $AQ$  к окружности  $S$ . Докажите, что  $B$  — середина отрезка  $PQ$ .

7.16. Пусть  $AD$  и  $AE$  — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника  $ABC$  и  $S_a$  — окружность с диаметром  $DE$ ; окружности  $S_b$  и  $S_c$  определяются аналогично. Докажите, что:

а) окружности  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$  имеют две общие точки  $M$  и  $N$ , причем прямая  $MN$  проходит через центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ;

б) проекции точки  $M$  (и точки  $N$ ) на стороны треугольника  $ABC$  образуют правильный треугольник.

7.17. Треугольник  $ABC$  правильный,  $M$  — некоторая точка. Докажите, что если числа  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  образуют геометрическую прогрессию, то знаменатель этой прогрессии меньше 2.

См. также задачи 14.19, а), 18.14.

### § 3. Вписанный угол

7.18. На окружности фиксированы точки  $A$  и  $B$ , а точка  $C$  перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольников  $ABC$ .

7.19. Точка  $P$  перемещается по описанной окружности квадрата  $ABCD$ . Прямые  $AP$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , а прямая, проходящая через точку  $Q$  параллельно  $AC$ , пересекает прямую  $BP$  в точке  $X$ . Найдите ГМТ  $X$ .

7.20. а) На окружности фиксированы точки  $A$  и  $B$ , а точки  $A_1$  и  $B_1$  движутся по той же окружности так, что величина дуги  $A_1B_1$  остается постоянной;  $M$  — точка пересечения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ . Найдите ГМТ  $M$ .

б) В окружность вписаны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , причем треугольник  $ABC$  неподвижен, а треугольник  $A_1B_1C_1$  вращается. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника  $A_1B_1C_1$ .

**7.21.** На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

**7.22.** Найдите ГМТ  $X$ , лежащих внутри правильного треугольника  $ABC$  и обладающих тем свойством, что  $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ$ .

См. также задачи 2.5, 2.37.

#### § 4. Вспомогательные равные треугольники

**7.23.** Дана полуокружность с центром  $O$ . Из каждой точки  $X$ , лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проводится касающийся полуокружности луч и на нем откладывается отрезок  $XM$ , равный отрезку  $XO$ . Найдите ГМТ  $M$ , полученных таким образом.

**7.24.** Пусть  $A$  и  $B$  — фиксированные точки плоскости. Найдите ГМТ  $C$ , обладающих следующим свойством: высота  $h_b$  треугольника  $ABC$  равна  $b$ .

**7.25.** Даны окружность и точка  $P$  внутри ее. Через каждую точку  $Q$  окружности проведем касательную. Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую  $PQ$ , и касательная пересекаются в точке  $M$ . Найдите ГМТ  $M$ .

#### § 5. Гомотетия

**7.26.** На окружности фиксированы точки  $A$  и  $B$ . Точка  $C$  перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения медиан треугольников  $ABC$ .

**7.27.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите множество центров прямоугольников  $PQRS$ , вершины  $Q$  и  $R$  которых лежат на стороне  $AC$ , вершины  $R$  и  $S$  — на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно.

**7.28.** Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках  $P$  и  $Q$ . Какую линию описывает середина отрезка  $PQ$ , когда секущая вращается вокруг точки  $A$ ?

**7.29.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, причем  $B$  находится между  $A$  и  $C$ . Найдите ГМТ  $M$  таких, что радиусы описанных окружностей треугольников  $AMB$  и  $CMB$  равны.

См. также задачи 19.10, 19.21, 19.38.

#### § 6. Метод ГМТ

**7.30.** Точки  $P$  и  $Q$  движутся с одинаковой постоянной скоростью  $v$  по двум прямым, пересекающимся в точке  $O$ . Докажите, что на плоскости существует неподвижная точка

$A$ , расстояния от которой до точек  $P$  и  $Q$  в любой момент времени равны.

7.31. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что отрезки, соединяющие точку  $O$  с серединами сторон четырехугольника, делят его площадь на равные части.

7.32. Пусть  $D$  и  $E$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$ , а точка  $M$  лежит на стороне  $AC$ . Докажите, что если  $MD < AD$ , то  $ME > EC$ .

7.33. Внутри выпуклого многоугольника взяты точки  $P$  и  $Q$ . Докажите, что существует вершина многоугольника, менее удаленная от  $Q$ , чем от  $P$ .

7.34. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  таковы, что для любой четвертой точки  $M$  либо  $MA \leq MB$ , либо  $MA \leq MC$ . Докажите, что точка  $A$  лежит на отрезке  $BC$ .

7.35. Дан четырехугольник  $ABCD$ , причем  $AB < BC$  и  $AD < DC$ . Точка  $M$  лежит на диагонали  $BD$ . Докажите, что  $AM < MC$ .

## § 7. ГМТ с ненулевой площадью

7.36. Пусть  $O$  — центр прямоугольника  $ABCD$ . Найдите ГМТ  $M$ , для которых  $AM \geq OM$ ,  $BM \geq OM$ ,  $CM \geq OM$  и  $DM \geq OM$ .

7.37. Найдите ГМТ  $X$ , из которых можно провести касательные к данной дуге  $AB$  окружности.

7.38. Пусть  $O$  — центр правильного треугольника  $ABC$ . Найдите ГМТ  $M$ , удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку  $M$ , пересекает либо отрезок  $AB$ , либо отрезок  $CO$ .

7.39. На плоскости даны два непересекающихся круга. Обязательно ли найдется точка  $M$ , лежащая вне этих кругов, удовлетворяющая такому условию: каждая прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает хотя бы один из этих кругов?

Найдите ГМТ  $M$ , удовлетворяющих такому условию. См. также задачу 18.11.

## § 8. Теорема Карно

7.40. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на стороны  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $A_1 B^2 + C_1 A^2 + B_1 C^2 = B_1 A^2 + A_1 C^2 + C_1 B^2$  (Карно).

7.41. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7.42. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  таковы, что  $AB_1 = AC_1$ ,  $BC_1 = BA_1$  и  $CA_1 = CB_1$ . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке.

7.43. а) Перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника  $ABC$  на соответствующие стороны треугольника  $A_1B_1C_1$ , пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника  $A_1B_1C_1$  на соответствующие стороны треугольника  $ABC$ , тоже пересекаются в одной точке.

б) Прямые, проведенные через вершины треугольника  $ABC$  параллельно соответствующим сторонам треугольника  $A_1B_1C_1$ , пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые, проведенные через вершины треугольника  $A_1B_1C_1$  параллельно соответствующим сторонам треугольника  $ABC$ , тоже пересекаются в одной точке.

7.44. На прямой  $l$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  и из вершин треугольника  $ABC$  на эту прямую опущены перпендикуляры  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$ . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$  (отношения отрезков ориентированные).

7.45. Треугольник  $ABC$  правильный,  $P$  — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников  $PAB$ ,  $PBC$  и  $PCA$  на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , пересекаются в одной точке.

7.46. Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

## § 9. Окружность Ферма — Аполлония

7.47. Докажите, что множество точек  $X$ , обладающих тем свойством, что  $k_1A_1X^2 + \dots + k_nA_nX^2 = c$ :

а) при  $k_1 + \dots + k_n \neq 0$  является окружностью или пустым множеством;

б) при  $k_1 + \dots + k_n = 0$  является прямой, плоскостью или пустым множеством.

7.48. Прямая  $l$  пересекает две окружности в четырех точках. Докажите, что четырехугольник, образованный касательными в этих точках, описанный, причем центр его

описанной окружности лежит на прямой, соединяющей центры данных окружностей.

**7.49.** Точки  $M$  и  $N$  таковы, что  $AM:BM:CM = AN:BN:CN$ . Докажите, что прямая  $MN$  проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ .

См. также задачи 7.6, 7.14, 8.59—8.63.

### Задачи для самостоятельного решения

**7.50.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  берутся точки  $D$  и  $E$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $DE$ .

**7.51.** Две окружности касаются данной прямой в двух данных точках  $A$  и  $B$  и касаются друг друга. Пусть  $C$  и  $D$  — точки касания этих окружностей с другой внешней касательной. Найдите геометрическое место середин отрезков  $CD$ .

**7.52.** Докажите, что если биссектриса одного из углов треугольника имеет внутри треугольника общую точку с перпендикуляром, восстановленным из середины противоположной стороны, то треугольник равнобедренный.

**7.53.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите множество всех точек  $M$  этого треугольника, для которых выполнено условие  $AM \geq BM \geq CM$ . Когда полученное множество есть а) пятиугольник; б) треугольник?

**7.54.** Дан квадрат  $ABCD$ . Найдите геометрическое место середин сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.

**7.55.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Найдите ГМТ  $M$  таких, что треугольники  $AMB$  и  $BCM$  равнобедренные.

**7.56.** Найдите геометрическое место середин отрезков длины  $2/\sqrt{3}$ , концы которых лежат на сторонах единичного квадрата.

**7.57.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  данного треугольника  $ABC$  выбираются такие точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$ , что  $PQ \parallel AC$  и  $PR \parallel BC$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $QR$ .

**7.58.** Дана полуокружность с диаметром  $AB$ . Для любой точки  $X$  этой полуокружности на луче  $XA$  строится точка  $Y$  так, что  $XY = XB$ . Найдите ГМТ  $Y$ .

**7.59.** Дан треугольник  $ABC$ . На его сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  выбираются точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Найдите ГМТ пересечения описанных окружностей треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ .

## Решения

7.1. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры колес радиусов  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Если  $M$  — точка пересечения внутренних касательных, то  $O_1M : O_2M = r_1 : r_2$ . Из этого условия легко получить, что расстояние от точки  $M$  до прямой  $l$  равно  $2r_1r_2/(r_1+r_2)$ . Поэтому все точки пересечения общих внутренних касательных лежат на прямой, параллельной прямой  $l$  и отстоящей от нее на расстояние  $2r_1r_2/(r_1+r_2)$ .

7.2. Пусть  $O$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Отложим на лучах  $OA$  и  $OD$  отрезки  $OK$  и  $OL$ , равные  $AB$  и  $CD$  соответственно. Тогда  $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{KOX} + S_{LOX} = S_{KOL} \pm S_{KXL}$ . Следовательно, площадь треугольника  $KXL$  постоянна, т. е. точка  $X$  лежит на прямой, параллельной  $KL$ .

7.3. Пусть  $a$  и  $b$  — единичные векторы, параллельные данным прямым;  $x = \vec{OX}$ . Сумма длин проекций вектора  $x$  на данные прямые равна  $|(a, x)| + |(b, x)| = |(a \pm b, x)|$ , причем смена знака происходит на перпендикулярах, восстановленных из точки  $O$  к данным прямым. Поэтому искомое ГМТ — прямоугольник, стороны которого параллельны биссектрисам углов между данными прямыми, а вершины лежат на указанных перпендикулярах.

7.4. Пусть  $l$  — прямая, проходящая через середины сторон  $BC$  и  $AD$ . Предположим, что точка  $X$  не лежит на прямой  $l$ , например что точки  $A$  и  $X$  лежат по одну сторону от прямой  $l$ . Тогда  $AX < DX$  и  $BX < CX$ , а значит,  $AX + BX < CX + DX$ . Поэтому прямая  $l$  — искомое ГМТ.

7.5. Пусть  $N$  — такая точка, что  $\vec{MN} = \vec{DA}$ . Тогда  $\angle NAM = \angle DMA$  и  $\angle NBM = \angle BMC$ , поэтому четырехугольник  $AMBN$  вписанный. Диагонали вписанного четырехугольника  $AMBN$  равны, поэтому  $AM \parallel BN$  или  $BM \parallel AN$ . В первом случае  $\angle AMD = \angle MAN = \angle AMB$ , а во втором случае  $\angle BMC = \angle MBN = \angle BMA$ . Если  $\angle AMB = \angle AMD$ , то  $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$  и точка  $M$  лежит на диагонали  $AC$ , а если  $\angle BMA = \angle BMC$ , то точка  $M$  лежит на диагонали  $BD$ . Ясно также, что если точка  $M$  лежит на одной из диагоналей, то  $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ$ .

7.6. Введем систему координат, выбрав точку  $A$  в качестве начала координат и направив ось  $Ox$  по лучу  $AB$ . Пусть точка  $M$  имеет координаты  $(x, y)$ . Тогда  $AM^2 = x^2 + y^2$  и  $BM^2 = (x-a)^2 + y^2$ , где  $a = AB$ . Поэтому  $AM^2 - BM^2 = 2ax - a^2$ . Эта величина равна  $k$  для точек  $M$  с координатами  $((a^2+k)/2a, y)$ ; все такие точки лежат на прямой, перпендикулярной  $AB$ .

7.7. Пусть  $A$  и  $B$  — точки пересечения окружностей  $S$  и  $S_1$ . Тогда  $XM^2 = XA \cdot XB = XO^2 - R^2$ , где  $O$  и  $R$  — центр и радиус



окружности  $S$ . Поэтому  $XO^2 - XM^2 = R^2$ , а значит, точки  $X$  лежат на перпендикуляре к прямой  $OM$  (см. задачу 7.6).

7.8. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей,  $R_1$  и  $R_2$  — их радиусы. Окружность радиуса  $r$  с центром  $X$  пересекает первую окружность в диаметрально противоположных точках тогда и только тогда, когда  $r^2 = XO_1^2 + R_1^2$ , поэтому искомое ГМТ состоит из таких точек  $X$ , что  $XO_1^2 + R_1^2 = XO_2^2 + R_2^2$ ; все такие точки  $X$  лежат на прямой, перпендикулярной  $O_1O_2$  (задача 7.6).

7.9. Пусть  $O$  — центр окружности,  $R$  — ее радиус,  $M$  — точка пересечения касательных, проведенных через концы хорды, содержащей точку  $A$ ,  $P$  — середина этой хорды. Тогда  $OP \cdot OM = R^2$  и  $OP = OA \cos \varphi$ , где  $\varphi = \angle AOP$ . Поэтому  $AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cos \varphi = OM^2 + OA^2 - 2R^2$ , а значит, величина  $OM^2 - AM^2 = 2R^2 - OA^2$  постоянна. Следовательно, все точки  $M$  лежат на прямой, перпендикулярной  $OA$  (см. задачу 7.6).

7.10. Пусть  $P$  и  $Q$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Тогда  $AX^2 + CX^2 = 2PX^2 + AC^2/2$  и  $BX^2 + DX^2 = 2QX^2 + BD^2/2$  (см. задачу 12.11, а), поэтому в задаче б) искомое ГМТ состоит из таких точек  $X$ , что  $PX^2 - QX^2 = (BD^2 - AC^2)/4$ , а в задаче а)  $P = Q$ , поэтому рассматриваемая величина равна  $(BD^2 - AC^2)/2$ .

7.11. Пусть  $M$  и  $N$  — концы данного отрезка,  $O$  — его середина. Точка  $B$  лежит на окружности с диаметром  $MN$ , поэтому  $OB = MN/2$ . Траекторией точки  $O$  является часть окружности радиуса  $MN/2$  с центром  $B$ , заключенная внутри угла  $ABC$ .

7.12. Пусть  $M$  — данная точка,  $O$  — центр данной окружности. Если  $X$  — середина хорды  $AB$ , то  $XO \perp AB$ . Следовательно, искомое ГМТ является окружностью с диаметром  $MO$ .

7.13. Проведем через точку  $M$  общую касательную к окружностям. Пусть  $O$  — точка пересечения этой касательной с прямой  $AB$ . Тогда  $AO = MO = BO$ , т. е.  $O$  — середина отрезка  $AB$ . Точка  $M$  лежит на окружности с центром  $O$  и радиусом  $AB/2$ . Множеством точек  $M$  является окружность с диаметром  $AB$  (точки  $A$  и  $B$  следует исключить).

7.14. При  $k = 1$  получаем серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ . В дальнейшем будем считать, что  $k \neq 1$ .

Введем систему координат на плоскости так, чтобы точки  $A$  и  $B$  имели координаты  $(-a, 0)$  и  $(a, 0)$  соответственно. Если

точка  $M$  имеет координаты  $(x, y)$ , то  $\frac{AM^2}{BM^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$ . Уравнение

$\frac{AM^2}{BM^2} = k^2$  приводится к виду

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром

$$\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}a, 0\right) \text{ и радиусом } \frac{2ka}{|1-k^2|}.$$

7.15. Пусть прямая  $AB$  пересекает окружность  $S$  в точках  $E$  и  $F$ , причем точка  $E$  лежит на отрезке  $AB$ . Тогда  $PE$  — биссектриса треугольника  $APB$ , поэтому  $\angle EPB = \angle EPA = \angle EFP$ . А так как  $\angle EPF = 90^\circ$ , то  $PB \perp EF$ .

7.16. а) Рассматриваемые окружности являются окружностями Аполлония для пар вершин треугольника  $ABC$ , поэтому если  $X$  — общая точка окружностей  $S_a$  и  $S_b$ , то  $XB:XC = AB:AC$  и  $XC:XA = BC:BA$ , т. е.  $XB:XA = CB:CA$ , а значит, точка  $X$  принадлежит окружности  $S_c$ . Ясно также, что если  $AB > BC$ , то точка  $D$  лежит внутри окружности  $S_b$ , а точка  $A$  — вне ее. Следовательно, окружности  $S_a$  и  $S_b$  пересекаются в двух различных точках.

Для завершения доказательства остается воспользоваться результатом задачи 7.49.

б) Согласно задаче а)  $MA = \lambda/a$ ,  $MB = \lambda/b$  и  $MC = \lambda/c$ . Пусть  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точки  $M$  на прямые  $AC$  и  $AB$ . Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на окружности с диаметром  $MA$ , поэтому  $B_1C_1 = MA \sin B_1AC_1 = (\lambda/a)(a/2R) = \lambda/2R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ . Аналогично  $A_1C_1 = A_1B_1 = \lambda/(2R)$ .

7.17. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — такие точки, что  $BO_1 = 4BA/3$  и  $CO_2 = 4CB/3$ . Легко проверить, что если  $BM > 2AM$ , то точка  $M$  лежит внутри окружности  $S_1$  радиуса  $2AB/3$  с центром  $O_1$  (см. задачу 7.14), а если  $CM > 2BM$ , то точка  $M$  лежит внутри окружности  $S_2$  радиуса  $2AB/3$  с центром  $O_2$ . Так как  $O_1O_2 > BO_1 = 4AB/3$ , а сумма радиусов окружностей  $S_1$  и  $S_2$  равна  $4AB/3$ , то эти окружности не пересекаются. Следовательно, если  $BM = qAM$  и  $CM = qBM$ , то  $q < 2$ .

7.18. а) Пусть  $O$  — точка пересечения высот  $AA_1$  и  $BB_1$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности с диаметром  $CO$ . Следовательно,  $\angle AOB = 180^\circ - \angle C$ . Поэтому искомое ГМТ — окружность, симметричная данной относительно прямой  $AB$  (точки  $A$  и  $B$  следует исключить).

б) Если  $O$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ , то  $\angle AOB = 90^\circ + \angle C/2$ . На каждой из двух дуг  $AB$  угол  $C$  постоянен, поэтому искомым ГМТ являются две дуги, из которых отрезок  $AB$  виден под углом  $90^\circ + \angle C/2$  (точки  $A$  и  $B$  следует исключить).

7.19. Точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $DX$ , поэтому  $\angle(QD, DX) = \angle(QP, PX) = \angle(AP, PB) = 45^\circ$ , т. е. точка  $X$  лежит на прямой  $CD$ .

7.20. а) Если точка  $A_1$  пройдет по окружности дугу величиной  $2\varphi$ , то точка  $B_1$  тоже пройдет дугу величиной  $2\varphi$ , а значит, прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  повернутся на угол  $\varphi$  и угол между ними не изменится.

Поэтому точка  $M$  перемещается по окружности, содержащей точки  $A$  и  $B$ .

б) Пусть прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  в некоторый момент пересекаются в точке  $P$ . Тогда, например, точка пересечения прямых  $AA_1$  и  $BB_1$  перемещается по описанной окружности треугольника  $ABP$ . Ясно также, что описанные окружности треугольников  $ABP$ ,  $BCP$  и  $CAP$  имеют единственную общую точку  $P$ .

7.21. Предположим, что точки  $A$  и  $C$  лежат на противоположных сторонах прямоугольника. Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $BD$  соответственно. Проведем через точку  $M$  прямую  $l_1$ , параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки  $A$  и  $C$ , а через точку  $N$  прямую  $l_2$ , параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки  $B$  и  $D$ . Пусть  $O$  — точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Ясно, что точка  $O$  лежит на окружности  $S$ , построенной на отрезке  $MN$  как на диаметре. С другой стороны, точка  $O$  является центром прямоугольника. Ясно, что прямоугольник можно построить для любой точки  $O$ , лежащей на окружности  $S$ .

Остается заметить, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $D$ . Поэтому искомым ГМТ является объединение трех окружностей.

7.22. Легко проверить, что точки высот треугольника  $ABC$  обладают требуемым свойством. Предположим, что требуемым свойством обладает точка  $X$ , не лежащая ни на одной из высот треугольника  $ABC$ . Тогда прямая  $BX$  пересекает высоты  $AA_1$  и  $CC_1$  в точках  $X_1$  и  $X_2$ . Так как  $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90^\circ = \angle X_1AB + \angle X_1BC + \angle X_1CA$ , то  $\angle XAB - \angle X_1AB = \angle X_1CA - \angle XCA$ , т. е.  $\angle(XA, AX_1) = \angle(X_1C, CX)$ . Следовательно, точка  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $AXC'$ , где точка  $C'$  симметрична  $C$  относительно прямой  $BX$ . Аналогично доказывается, что точка  $X_2$  лежит на этой окружности, а значит, прямая  $BX$  пересекает эту окружность в трех различных точках. Получено противоречие.

7.23. Пусть  $K$  — точка касания прямой  $MX$  и данной полуокружности, а  $P$  — проекция точки  $M$  на диаметр. В прямоугольных треугольниках  $MPX$  и  $OKX$  равны гипотенузы и  $\angle PXM = \angle OKX$ , а значит, эти треугольники равны и, в частности  $MP = KO = R$ , где  $R$  — радиус данной полуокружности. Следовательно, точка  $M$  лежит на прямой  $l$ , параллельной диаметру полуокружности и касающейся полуокружности. Пусть  $AB$  — отрезок прямой  $l$ , проекцией которого является диаметр полуокружности. Из точки прямой  $l$ , лежащей вне отрезка  $AB$ , нельзя провести касательную к данной полуокружности, так как касательная, проведенная к окружности, будет касаться другой полуокружности.

Искомым ГМТ является отрезок  $AB$ , из которого выброшены точки  $A$  и  $B$  и его середина.

7.24. Пусть  $H$  — основание высоты  $h_b$  треугольника  $ABC$  и  $h_b = b$ . Обозначим через  $B'$  точку пересечения перпендикуляра к прямой

$AB$ , проведенного через точку  $A$ , и перпендикуляра к прямой  $АН$ , проведенного через точку  $C$ . Прямоугольные треугольники  $AB'C$  и  $ВАН$  равны, так как  $\angle AB'C = \angle ВАН$  и  $AC = ВН$ . Поэтому  $AB' = AB$ , т. е. точка  $C$  лежит на окружности с диаметром  $AB'$ .

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — образы окружности  $S$  с диаметром  $AB$  при поворотах на  $\pm 90^\circ$  с центром  $A$  (рис. 81). Мы доказали, что точка  $C \neq A$  принадлежит объединению окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Обратно, пусть точка  $C \neq A$  принадлежит окружности  $S_1$  или  $S_2$ ,  $AB'$  — диаметр соответствующей окружности. Тогда  $\angle AB'C = \angle HAB$  и  $A'B = AB$ , поэтому  $AC = HB$ .

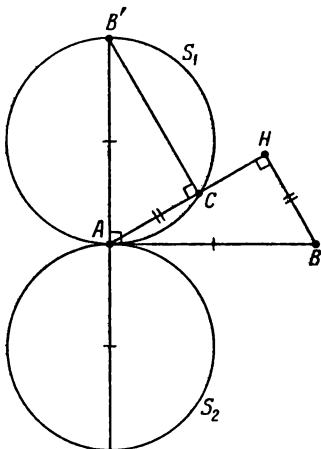


Рис. 81

**7.25.** Пусть  $O$  — центр окружности,  $N$  — точка пересечения прямых  $OM$  и  $QP$ . Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MS$  на прямую  $OP$ . Из подобия треугольников  $ONQ$  и  $OQM$ ,  $OPN$  и  $OMS$  получаем  $ON:OQ = OQ:OM$  и  $OP:ON = OM:OS$ . Перемножая эти равенства, получаем  $OP:OQ = OQ:OS$ . Поэтому  $OS = OQ^2:OP$  является постоянной величиной. А так как точка  $S$  лежит на прямой  $OP$ , ее положение

не зависит от выбора точки  $Q$ . Искомым ГМТ является прямая, перпендикулярная прямой  $OP$  и проходящая через точку  $S$ .

**7.26.** Пусть  $O$  — середина отрезка  $AB$ ,  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . При гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $1/3$  точка  $C$  переходит в точку  $M$ . Поэтому точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  лежат на окружности  $S$ , являющейся образом исходной окружности при гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $1/3$ . Для получения искомого ГМТ из окружности  $S$  нужно выбросить образы точек  $A$  и  $B$ .

**7.27.** Пусть  $O$  — середина высоты  $BH$ ,  $M$  — середина отрезка  $AC$ ,  $D$  и  $E$  — середины сторон  $RQ$  и  $PS$  соответственно (рис. 82).

Точки  $D$  и  $E$  лежат на прямых  $AO$  и  $CO$  соответственно. Середина отрезка  $DE$  является центром прямоугольника  $PQRS$ . Ясно, что она лежит на отрезке  $OM$ . Искомым ГМТ является отрезок  $OM$ , за исключением его концов.

**7.28.** Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей (точка  $P$  лежит на окружности

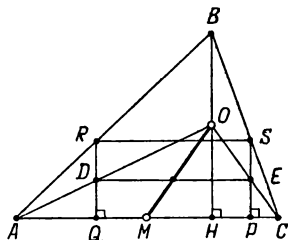


Рис. 82

с центром  $O_1$ ),  $O$  — середина отрезка  $O_1O_2$ ;  $P'$ ,  $Q'$  и  $O'$  — проекции точек  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O$  на прямую  $PQ$ . При вращении прямой  $PQ$  точка  $O'$  пробегает окружность  $S$  с диаметром  $AO$ . Ясно, что при гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом 2 отрезок  $P'Q'$  переходит в отрезок  $PQ$ , т. е. точка  $O'$  переходит в середину отрезка  $PQ$ . Поэтому искомым ГМТ является образ окружности  $S$  при этой гомотетии.

**7.29.** Пусть  $P$  и  $Q$  — центры описанных окружностей треугольников  $AMB$  и  $СMB$ . Точка  $M$  принадлежит искомому ГМТ, если  $BPMQ$  — ромб, т. е. точка  $M$  является образом середины отрезка  $PQ$  при гомотетии с центром  $B$  и коэффициентом 2. А так как проекции точек  $P$  и  $Q$  на прямую  $AC$  являются серединами отрезков  $AB$  и  $BC$ , середины всех отрезков  $PQ$  лежат на одной прямой. (Точку прямой  $AC$  из полученного ГМТ следует исключить.)

**7.30.** Точка  $P$  проходит через точку  $O$  в момент  $t_1$ , точка  $Q$  — в момент  $t_2$ . В момент  $(t_1 + t_2)/2$  точки  $P$  и  $Q$  находятся от точки  $O$  на одинаковом расстоянии, равном  $|t_1 - t_2|v/2$ . Проведем в этот момент перпендикуляры к прямым в точках  $P$  и  $Q$ . Легко проверить, что точка пересечения этих перпендикуляров является искомой.

**7.31.** Обозначим середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$  через  $M$  и  $N$  соответственно. Ясно, что  $S_{AMB} = S_{BMC}$  и  $S_{AMD} = S_{DMC}$ , т. е.  $S_{DABM} = S_{BCDM}$ . Поскольку при перемещении точки  $M$  параллельно  $BD$  площади четырехугольников  $DABM$  и  $BCDM$  не изменяются, то  $S_{DAVO} = S_{BCDO}$ . Аналогичные рассуждения для точки  $N$  показывают, что  $S_{ABCO} = S_{CDAO}$ . Поэтому  $S_{ADO} + S_{ABO} = S_{BCO} + S_{CDO}$  и  $S_{ABO} + S_{BCO} = S_{CDO} + S_{ADO}$ , а значит,  $S_{ADO} = S_{BCO} = S_1$  и  $S_{ABO} = S_{CDO} = S_2$ , т. е. площадь каждой из четырех частей, на которые отрезки, соединяющие точку  $O$  с серединами сторон четырехугольника, разбивают его, равна  $(S_1 + S_2)/2$ .

**7.32.** Опустим из точки  $B$  высоту  $BB_1$ . Тогда  $AD = B_1D$  и  $CE = B_1E$ . Ясно, что если  $MD < AD$ , то точка  $M$  лежит на отрезке  $AB_1$ , т. е. вне отрезка  $B_1C$ . Следовательно,  $ME > EC$ .

**7.33.** Предположим, что все вершины многоугольника удалены от точки  $Q$  не меньше, чем точки от  $P$ . Тогда все вершины многоугольника лежат в той же полуплоскости, заданной серединным перпендикуляром к отрезку  $PQ$ , что и точка  $P$ , а точка  $Q$  лежит в другой полуплоскости. Следовательно, точка  $Q$  лежит вне многоугольника, что противоречит условию.

**7.34.** Найдем ГМТ  $M$ , для которых  $MA > MB$  и  $MA > MC$ . Проведем серединные перпендикуляры  $l_1$  и  $l_2$  к отрезкам  $AB$  и  $AC$ .  $MA > MB$  для точек, лежащих внутри полуплоскости, заданной прямой  $l_1$  и не содержащей точку  $A$ . Поэтому искомым ГМТ является пересечение полуплоскостей (без границ), заданных прямыми  $l_1$ ,  $l_2$  и не содержащих точку  $A$ . Если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не лежат на одной прямой, то это ГМТ всегда непусто. Если  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой, но  $A$  не лежит на отрезке  $BC$ , то это ГМТ

тоже не пусто. Если же  $A$  лежит на отрезке  $BC$ , то это ГМТ пусто, т. е. для любой точки  $M$  либо  $MA \leq MB$ , либо  $MA \leq MC$ .

7.35. Пусть  $O$  — середина диагонали  $AC$ . Проекции точек  $B$  и  $D$  на прямую  $AC$  лежат на отрезке  $AO$ , поэтому проекция точки  $M$  тоже лежит на отрезке  $AO$ .

7.36. Проведем серединный перпендикуляр  $l$  к отрезку  $AO$ . Ясно, что  $AM \geq OM$  тогда и только тогда, когда точка  $M$  лежит по ту же сторону от прямой  $l$ , что и точка  $O$  (или лежит на прямой  $l$ ). Поэтому искомым ГМТ является ромб, образованный серединными перпендикулярами к отрезкам  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$ .

7.37. Искомое ГМТ заштриховано на рис. 83 (граница входит в ГМТ).

7.38. Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — середины сторон  $CB$  и  $AC$  соответственно. Искомым ГМТ является внутренность четырехугольника  $OA_1CB_1$ .

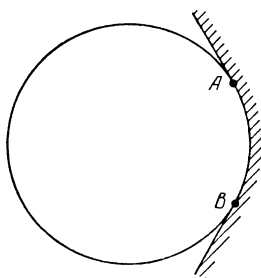


Рис. 83

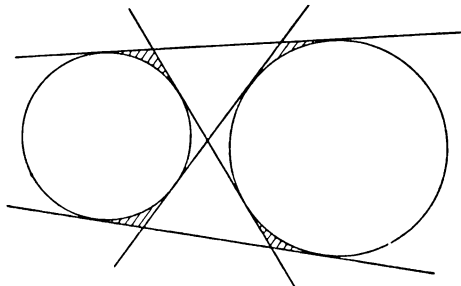


Рис. 84

7.39. Проведем общие касательные к данным кругам (рис. 84). Легко проверить, что точки, принадлежащие заштрихованным областям (но не их границам), удовлетворяют требуемому условию, а точки, не лежащие в этих областях, не удовлетворяют этому условию.

7.40. Пусть перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , пересекаются в точке  $M$ . Так как точки  $B_1$  и  $M$  лежат на одном перпендикуляре к прямой  $AC$ , то  $B_1A^2 - B_1C^2 = MA^2 - MC^2$ . Аналогично  $C_1B^2 - C_1A^2 = MB^2 - MA^2$  и  $A_1C^2 - A_1B^2 = MC^2 - MB^2$ . Складывая эти равенства, получаем  $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$ .

Обратно, пусть  $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$ . Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек  $A_1$  и  $B_1$  на прямые  $BC$  и  $AC$ , через  $M$ . Проведем через точку  $M$  прямую  $l$ , перпендикулярную прямой  $AB$ . Если  $C'_1$  — точка на прямой  $l$ , то, согласно предыдущему,  $A_1B^2 + C'_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C'_1B^2$ . Поэтому  $C'_1A^2 - C'_1B^2 = C_1A^2 - C_1B^2$ . Согласно задаче 7.6 ГМТ  $X$ , для которых  $XA^2 - XB^2 = k$ , является прямой, перпендикулярной отрезку  $AB$ . Поэтому перпендикуляр, опущенный из

точки  $C_1$  на прямую  $AB$ , проходит через точку  $M$ , что и требовалось.

**7.41.** Положим  $A_1 = A$ ,  $B_1 = B$  и  $C_1 = C$ . Из очевидного равенства  $AB^2 + CA^2 + BC^2 = BA^2 + AC^2 + CB^2$  получаем, что высоты, опущенные из точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке.

**7.42.** Достаточно воспользоваться результатом задачи 7.40.

**7.43.** а) Эта задача является очевидным следствием задачи 7.40.

б) Пусть при повороте на  $90^\circ$  относительно некоторой точки треугольник  $A_1B_1C_1$  переходит в  $A_2B_2C_2$ . Перпендикуляры к сторонам треугольника  $A_2B_2C_2$  параллельны соответствующим сторонам треугольника  $A_1B_1C_1$ , поэтому перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника  $ABC$  на стороны треугольника  $A_2B_2C_2$ , пересекаются в одной точке. Следовательно, в одной точке пересекаются перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника  $A_2B_2C_2$  на стороны треугольника  $ABC$ . Остается заметить, что при повороте на  $90^\circ$ , переводящем треугольник  $A_2B_2C_2$  в  $A_1B_1C_1$ , эти перпендикуляры переходят в прямые, проходящие через стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  параллельно соответствующим сторонам треугольника  $ABC$ .

**7.44.** Нужно выяснить, в каком случае выполняется равенство  $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$ . Вычитая из обеих частей этого равенства величину  $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2$ , переходим к соотношению  $A_2B_1^2 + B_2C_1^2 + C_2A_1^2 = B_2A_1^2 + C_2B_1^2 + A_2C_1^2$ , т. е.  $(b_1 - a_2)^2 + (c_1 - b_2)^2 + (a_1 - c_2)^2 = (a_1 - b_2)^2 + (b_1 - c_2)^2 + (c_1 - a_2)^2$ , где  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$  — координаты точек  $A_i$ ,  $B_i$  и  $C_i$  на прямой  $l$ . После сокращения получаем  $a_2b_1 + b_2c_1 + c_2a_1 = a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2$ , а значит,  $(b_2 - a_2)(c_1 - b_1) = (b_1 - a_1)(c_2 - b_2)$ , т. е.  $A_2B_2 : B_2C_2 = A_1B_1 : B_1C_1$ .

**7.45.** Можно считать, что длина стороны данного правильного треугольника равна 2. Пусть  $PA = 2a$ ,  $PB = 2b$  и  $PC = 2c$ ;  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — проекции центров вписанных окружностей треугольников  $PBC$ ,  $PCA$  и  $PAB$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Согласно задаче 3.2  $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = (1 + a - c)^2 + (1 + b - a)^2 + (1 + c - b)^2 = 3 + (a - c)^2 + (b - a)^2 + (c - b)^2 = BA_1^2 + CB_1^2 + AC_1^2$ .

**7.46.** Отрезки, на которые биссектрисы делят стороны треугольника, легко вычисляются. В результате получаем, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис, пересекаются, то

$$\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ac}{a+b}\right)^2,$$

т. е.

$$0 = \frac{a^2(c-b)}{b+c} + \frac{b^2(a-c)}{a+c} + \frac{c^2(b-a)}{a+b} = -\frac{(b-a)(a-c)(c-b)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

**7.47.** Пусть  $(a_i, b_i)$  — координаты точки  $A_i$ ,  $(x, y)$  — координаты точки  $X$ . Тогда уравнение, которому удовлетворяет точка  $X$  переписется в виде  $c = \sum k_i((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2) = (\sum k_i)(x^2 + y^2) - (2\sum k_i a_i)x - (2\sum k_i b_i)y + \sum k_i(a_i^2 + b_i^2)$ . Если коэффициент при  $x^2 + y^2$  отличен от нуля, то это уравнение задаст окружность или пустое множество, а если он равен нулю, то уравнение задает прямую, плоскость или пустое множество.

**Замечание.** Если в случае а) точки  $A_1, \dots, A_n$  лежат на одной прямой  $l$ , то эту прямую можно выбрать в качестве оси  $Ox$ . Тогда  $b_i = 0$ , а значит, коэффициент при  $y$  равен нулю, т. е. центр окружности лежит на прямой  $l$ .

**7.48.** Пусть прямая  $l$  пересекает на данных окружностях дуги  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  величиной  $2\alpha_1$  и  $2\alpha_2$ ;  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей,  $R_1$  и  $R_2$  — их радиусы. Пусть  $K$  — точка пересечения касательных в точках  $A_1$  и  $A_2$ . По теореме синусов  $KA_1 : KA_2 = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1$ , т. е.  $KA_1 \sin \alpha_1 = KA_2 \sin \alpha_2$ . А так как  $KO_1^2 = KA_1^2 + R_1^2$  и  $KO_2^2 = KA_2^2 + R_2^2$ , то  $(\sin^2 \alpha_1)KO_1^2 - (\sin^2 \alpha_2)KO_2^2 = (R_1 \sin \alpha_1)^2 - (R_2 \sin \alpha_2)^2 = q$ . Аналогично доказывается, что и остальные точки пересечения касательных принадлежат геометрическому месту таких точек  $X$ , что  $(\sin^2 \alpha_1)XO_1^2 - (\sin^2 \alpha_2)XO_2^2 = q$ . Это ГМТ — окружность, центр которой лежит на прямой  $O_1O_2$  (см. замечание к задаче 7.47).

**7.49.** Пусть  $AM : BM : CM = p : q : r$ . Все точки  $X$ , удовлетворяющие соотношению  $(q^2 - r^2)AX^2 + (r^2 - p^2)BX^2 + (p^2 - q^2)CX^2 = 0$ , лежат на одной прямой (см. задачу 7.47), а точки  $M$ ,  $N$  и  $O$  удовлетворяют этому соотношению.



# ПОСТРОЕНИЯ

---

### Основные сведения

1. Задачи на построение решаются по определенной стандартной схеме. Сначала проводим анализ, т. е. предполагаем, что искомая фигура построена, и, исследуя ее свойства, находим, как ее можно задать с помощью исходных данных. На основании этих рассуждений описываем последовательность построений. Затем нужно доказать, что указанная последовательность построений приводит к требуемому результату, а также выяснить, в каких случаях сколько имеется решений.

При написании решений я несколько отклонился от этой схемы. Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев после анализа доказательство уже совершенно очевидно. В подобных случаях доказательство не приводится, но следует помнить, что его нужно провести самостоятельно. Если же доказательство не совсем очевидно, то указывается, как преодолеть возникающие трудности. Исследования числа решений задач на построение не приводится.

2. Некоторые задачи на построение, решения которых используют геометрические преобразования, распределены по соответствующим главам.

3. Если  $A$  и  $B$  — фиксированные точки, то ГМТ  $X$ , для которых  $AX:BX = k \neq 1$ , является окружностью (см. задачу 7.14). Это ГМТ иногда используется при решении задач на построение.

### Вводные задачи

1. Постройте треугольник  $ABC$  по стороне  $a$ , высоте  $h_a$  и углу  $A$ .

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

3. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

4. Постройте прямую, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

5. Даны отрезки, длины которых равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Постройте отрезок длиной: а)  $ab/c$ ; б)  $\sqrt{ab}$ .

## § 1. Метод геометрических мест точек

8.1. Постройте треугольник  $ABC$  по  $a$ ,  $h_a$  и  $R$ .

8.2. Постройте точку  $M$  внутри данного треугольника так, что  $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$ .

8.3. Проведите через данную точку  $P$ , лежащую внутри данной окружности, хорду так, чтобы разность длин отрезков, на которые  $P$  делит хорду, имела данную величину  $a$ .

8.4. Даны прямая и окружность, не имеющие общих точек. Постройте окружность данного радиуса  $r$ , касающуюся их.

8.5. Даны точка  $A$  и окружность  $S$ . Проведите через точку  $A$  прямую так, чтобы хорда, высекаемая окружностью  $S$  на этой прямой, имела данную длину  $d$ .

8.6. Дан четырехугольник  $ABCD$ . Впишите в него параллелограмм с заданными направлениями сторон.

## § 2. Вписанный угол

8.7. Постройте треугольник по  $a$ ,  $m_c$  и углу  $A$ .

8.8. Даны окружность и две точки  $A$  и  $B$  внутри ее. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

8.9. Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  прямоугольника  $ABCD$  пересекают некоторую прямую в точках  $M$  и  $N$ , а продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  пересекают ту же прямую в точках  $P$  и  $Q$ . Постройте прямоугольник  $ABCD$ , если даны точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  и длина  $a$  стороны  $AB$ .

8.10. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины.

8.11. Постройте треугольник  $ABC$  по стороне  $a$ , углу  $A$  и радиусу вписанной окружности  $r$ .

## § 3. Подобные треугольники и гомотетия

8.12. Постройте треугольник по двум углам  $A$ ,  $B$  и периметру  $P$ .

8.13. Постройте треугольник  $ABC$  по  $m_a$ ,  $m_b$  и  $m_c$ .

8.14. Постройте треугольник  $ABC$  по  $h_a$ ,  $h_b$  и  $h_c$ .

8.15. Впишите в данный остроугольный треугольник  $ABC$  квадрат  $KLMN$  так, чтобы вершины  $K$  и  $N$  лежали на сторонах  $AB$  и  $AC$ , а вершины  $L$  и  $M$  — на стороне  $BC$ .

8.16. Постройте треугольник  $ABC$  по  $h_a$ ,  $b - c$  и  $r$ .

См. также задачи 19.15—19.20, 19.39, 19.40.

#### § 4. Построение треугольников по различным элементам

В задачах этого параграфа требуется построить треугольник по указанным в условии элементам.

8.17.  $c$ ,  $m_a$  и  $m_b$ .

8.18.  $a$ ,  $b$  и  $h_a$ .

8.19.  $h_b$ ,  $h_c$  и  $m_a$ .

8.20.  $\angle A$ ,  $h_b$  и  $h_c$ .

8.21.  $a$ ,  $h_b$  и  $m_b$ .

8.22.  $h_a$ ,  $m_a$  и  $h_b$ .

8.23.  $a$ ,  $b$  и  $m_c$ .

8.24.  $h_a$ ,  $m_a$  и  $\angle A$ .

8.25.  $a$ ,  $b$  и  $l_c$ .

8.26.  $\angle A$ ,  $h_a$  и  $p$ .

См. также задачи 17.6—17.8.

#### § 5. Построение треугольников по различным точкам

8.27. Постройте треугольник  $ABC$ , если дана прямая  $l$ , на которой лежит сторона  $AB$ , и точки  $A_1$ ,  $B_1$  — основания высот, опущенных на стороны  $BC$  и  $AC$ .

8.28. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

8.29. а) Постройте треугольник  $ABC$ , зная три точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , в которых биссектрисы его углов пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

б) Постройте треугольник  $ABC$ , зная три точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , в которых высоты треугольника пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

8.30. Постройте треугольник  $ABC$ , зная три точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , симметричные центру  $O$  описанной окружности этого треугольника относительно сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ .

8.31. Постройте треугольник  $ABC$ , зная три точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , симметричные точке пересечения высот треугольника относительно сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  (оба треугольника остроугольные).

8.32. Постройте треугольник  $ABC$ , зная три точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , в которых высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины  $C$ , пересекают описанную окружность.

8.33. Постройте треугольник  $ABC$ , зная положение трех точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ .

8.34. Постройте треугольник  $ABC$  по центру описанной окружности  $O$ , точке пересечения медиан  $M$  и основанию  $H$  высоты  $CH$ .

8.35. Постройте треугольник  $ABC$  по центрам вписанной, описанной и одной из внеписанных окружностей.

## § 6. Треугольник

8.36. Постройте точки  $X$  и  $Y$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $AX=BY$  и  $XY\parallel AC$ .

8.37. Постройте треугольник по сторонам  $a$  и  $b$ , если известно, что угол против одной из них в три раза больше угла против другой.

8.38. Впишите в данный треугольник  $ABC$  прямоугольник  $PRQS$  (вершины  $R$  и  $Q$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$ ,  $P$  и  $S$ —на стороне  $AC$ ) так, чтобы его диагональ имела данную длину.

8.39. Проведите через данную точку  $M$  прямую так, чтобы она отсекала от данного угла с вершиной  $A$  треугольник  $ABC$  данного периметра  $2p$ .

8.40. Постройте треугольник  $ABC$  по медиане  $m_c$  и биссектрисе  $l_c$ , если  $\angle C=90^\circ$ .

8.41. Дан треугольник  $ABC$ , причем  $AB<BC$ . Постройте на стороне  $AC$  точку  $D$  так, чтобы периметр треугольника  $ABD$  был равен длине стороны  $BC$ .

8.42. Постройте треугольник  $ABC$  по радиусу описанной окружности и биссектрисе угла  $A$ , если известно, что разность углов  $B$  и  $C$  равна  $90^\circ$ .

8.43. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  дана точка  $P$ . Проведите через точку  $P$  прямую (отличную от  $AB$ ), пересекающую лучи  $CA$  и  $CB$  в таких точках  $M$  и  $N$ , что  $AM=BN$ .

8.44. Постройте треугольник  $ABC$  по радиусу вписанной окружности  $r$  и (ненулевым) длинам отрезков  $AO$  и  $АН$ , где  $O$ —центр вписанной окружности,  $H$ —ортоцентр.

См. также задачи 15.12, 6), 17.12—17.15, 18.10, 18.29.

## § 7. Четырехугольники

8.45. Постройте ромб, две стороны которого лежат на двух данных параллельных прямых, а две другие проходят через две данные точки.

8.46. Постройте четырехугольник  $ABCD$  по четырем сторонам и углу между  $AB$  и  $CD$ .

8.47. Через вершину  $A$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

8.48. Даны середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Постройте этот четырехугольник.

**8.49.** Даны три вершины вписанного и описанного четырехугольника. Постройте его четвертую вершину.

**8.50.** Даны вершины  $A$  и  $C$  равнобедренной описанной трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ); известны также направления ее оснований. Постройте вершины  $B$  и  $D$ .

**8.51.** На доске была начерчена трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) и проведены перпендикуляр  $OK$  из точки  $O$  пересечения диагоналей на основание  $AD$  и средняя линия  $EF$ . Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам  $OK$  и  $EF$ ?

**8.52.** Постройте выпуклый четырехугольник, если даны длины всех его сторон и одной средней линии (средней линией четырехугольника называют отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

**8.53.** Постройте вписанный четырехугольник по четырем сторонам (Брахмагупта).

См. также задачи 15.10, 15.13, 16.17, 17.4, 17.5.

## § 8. Окружности

**8.54.** Внутри угла даны две точки  $A$  и  $B$ . Постройте окружность, проходящую через эти точки и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

**8.55.** Даны окружность  $S$ , точка  $A$  на ней и прямая  $l$ . Постройте окружность, касающуюся данной окружности в точке  $A$  и данной прямой.

**8.56.** а) Даны две точки  $A$ ,  $B$  и прямая  $l$ . Постройте окружность, проходящую через точки  $A$ ,  $B$  и касающуюся прямой  $l$ .

б) Даны две точки  $A$  и  $B$  и окружность  $S$ . Постройте окружность, проходящую через точки  $A$  и  $B$  и касающуюся окружности  $S$ .

**8.57.** Даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

**8.58.** Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из трех данных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , имели бы длины  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно.

См. также задачи 15.8, 15.9, 15.11, 15.12, а), 16.13, 16.14, 16.18—16.20, 18.24.

## § 9. Окружность Аполлония

**8.59.** Постройте треугольник по  $a$ ,  $h_a$  и  $b/c$ .

**8.60.** Постройте треугольник  $ABC$ , если известны длина биссектрисы  $CD$  и длины отрезков  $AD$  и  $BD$ , на которые она делит сторону  $AB$ .

8.61. На прямой даны четыре точки  $A, B, C, D$  в указанном порядке. Постройте точку  $M$ , из которой отрезки  $AB, BC, CD$  видны под равными углами.

8.62. На плоскости даны два отрезка  $AB$  и  $A'B'$ . Постройте точку  $O$  так, чтобы треугольники  $AOB$  и  $A'OB'$  были подобны (одинаковые буквы обозначают соответственные вершины подобных треугольников).

8.63. Точки  $A$  и  $B$  лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

## § 10. Разные задачи

8.64. а) На параллельных прямых  $a$  и  $b$  даны точки  $A$  и  $B$ . Проведите через данную точку  $C$  прямую  $l$ , пересекающую прямые  $a$  и  $b$  в таких точках  $A_1$  и  $B_1$ , что  $AA_1 = BB_1$ .

б) Проведите через точку  $C$  прямую, равноудаленную от данных точек  $A$  и  $B$ .

8.65. Постройте правильный десятиугольник.

8.66. Постройте прямоугольник с данным отношением сторон, зная по одной точке на каждой из его сторон.

8.67. Даны диаметр  $AB$  окружности и точка  $C$  на нем. Постройте на этой окружности точки  $X$  и  $Y$ , симметричные относительно прямой  $AB$ , так, чтобы прямые  $AX$  и  $YC$  были перпендикулярными.

См. также задачи 15.7, 16.15, 16.16, 16.21, 17.9—17.11, 17.27—17.29, 18.41.

## § 11. Необычные построения

8.68. С помощью циркуля и линейки разделите угол  $19^\circ$  на 19 равных частей.

8.69. Докажите, что угол величиной  $n^\circ$ , где  $n$ —целое число, не делящееся на 3, можно разделить на  $n$  равных частей с помощью циркуля и линейки.

8.70. На клочке бумаги нарисованы две прямые, образующие угол, вершина которого лежит вне этого клочка. С помощью циркуля и линейки проведите ту часть биссектрисы угла, которая лежит на клочке бумаги.

8.71. С помощью двусторонней линейки постройте центр данной окружности, диаметр которой больше ширины линейки.

8.72. Даны точки  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми больше 1 м. С помощью одной лишь линейки, длина которой равна 10 см, постройте отрезок  $AB$ . (Линейкой можно только проводить прямые линии.)

**8.73.** На окружности радиуса  $a$  дана точка. С помощью пятикопеечной монеты радиуса  $a$  постройте точку, диаметрально противоположную данной.

## § 12. Построения одной линейкой

В задачах этого параграфа требуется выполнить указанные построения с помощью одной линейки без циркуля. С помощью одной линейки почти никаких построений выполнить нельзя. Например, нельзя даже построить середину отрезка (задача 30.59). Но если на плоскости проведены какие-либо вспомогательные линии, то можно выполнить многие построения. В случае, когда на плоскости нарисована вспомогательная окружность и отмечен ее центр, то с помощью линейки можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью линейки и циркуля. При этом, правда, считается, что окружность построена, если построен ее центр и одна ее точка.

**Замечание.** Если на плоскости нарисована окружность, но не отмечен ее центр, то с помощью одной линейки построить центр нельзя (задача 30.60).

**8.74.** Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, лежащий на одной из данных прямых.

**8.75.** Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок.

**8.76.** Даны две параллельные прямые. Разделите отрезок, лежащий на одной из них, на  $n$  равных частей.

**8.77.** Даны две параллельные прямые и точка  $P$ . Проведите через точку  $P$  прямую, параллельную данным прямым.

**8.78.** Даны окружность, ее диаметр  $AB$  и точка  $P$ . Проведите через точку  $P$  перпендикуляр к прямой  $AB$ .

**8.79.** Докажите, что если на плоскости даны какая-нибудь окружность  $S$  и ее центр  $O$ , то с помощью одной линейки можно:

а) из любой точки провести прямую, параллельную данной прямой, и опустить на данную прямую перпендикуляр;

б) на данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку;

в) построить отрезок длиной  $ab/c$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — длины данных отрезков;

г) построить точки пересечения данной прямой  $l$  с окружностью, центр которой — данная точка  $A$ , а радиус равен длине данного отрезка;

д) построить точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки.

См. также задачу 6.97.

### § 13. Построения с помощью двусторонней линейки

В задачах этого параграфа требуется выполнить построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (без циркуля). С помощью двусторонней линейки можно выполнить все построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки.

Пусть  $a$  — ширина двусторонней линейки. С помощью этой линейки можно выполнять следующие элементарные построения:

- 1) проводить прямую через две данные точки;
- 2) проводить прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние  $a$ ;
- 3) через две данные точки  $A$  и  $B$ , где  $AB \geq a$ , проводить пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно  $a$  (таких пар прямых две).

**8.80.** а) Постройте биссектрису данного угла  $AOB$ .

б) Дан острый угол  $AOB$ . Постройте угол  $BOC$ , биссектрисой которого является луч  $OA$ .

**8.81.** Восставьте перпендикуляр к данной прямой  $l$  в данной точке  $A$ .

**8.82.** а) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.

б) Постройте середину данного отрезка.

**8.83.** Даны угол  $AOB$ , прямая  $l$  и точка  $P$  на ней. Проведите через точку  $P$  прямые, образующие с прямой  $l$  угол, равный углу  $AOB$ .

**8.84.** Даны отрезок  $AB$ , непараллельная ему прямая  $l$  и точка  $M$  на ней. Постройте точки пересечения прямой  $l$  с окружностью радиуса  $AB$  с центром  $M$ .

**8.85.** Даны прямая  $l$  и отрезок  $OA$ , параллельный  $l$ . Постройте точки пересечения прямой  $l$  с окружностью радиуса  $OA$  с центром  $O$ .

**8.86.** Даны отрезки  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$ . Постройте радикальную ось (см. с. 66) окружностей радиуса  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

### § 14. Построения с помощью прямого угла

В задачах этого параграфа требуется выполнить указанные построения с помощью прямого угла. Прямой угол позволяет выполнить следующие элементарные построения:

а) расположить прямой угол так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая сторона проходила через данную точку;

б) расположить прямой угол так, чтобы его вершина лежала на данной прямой, а стороны проходили через две данные точки (если, конечно, для данной прямой и точек вообще существует такое положение прямого угла).

Расположив прямой угол одним из указанных способов, можно провести лучи, соответствующие его сторонам.



**8.87.** Проведите через данную точку  $A$  прямую, параллельную данной прямой  $l$ .

**8.88.** Дан отрезок  $AB$ . Постройте:

а) середину отрезка  $AB$ ;

б) отрезок  $AC$ , серединой которого является точка  $B$ .

**8.89.** Дан угол  $AOB$ . Постройте:

а) угол, вдвое больший угла  $AOB$ ;

б) угол, вдвое меньший угла  $AOB$ .

**8.90.** Даны угол  $AOB$  и прямая  $l$ . Проведите прямую  $l_1$  так, что угол между прямыми  $l$  и  $l_1$  равен углу  $AOB$ .

**8.91.** Даны отрезок  $AB$ , прямая  $l$  и точка  $O$  на ней. Постройте на прямой  $l$  такую точку  $X$ , что  $OX = AB$ .

**8.92.** Дан отрезок  $OA$ , параллельный прямой  $l$ . Постройте точки, в которых окружность радиуса  $OA$  с центром  $O$  пересекает прямую  $l$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**8.93.** Постройте прямую, касающуюся двух данных окружностей (разберите все возможные случаи).

**8.94.** Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые высота делит основание, и медиана, проведенная к боковой стороне.

**8.95.** Постройте параллелограмм  $ABCD$  по вершине  $A$  и серединам сторон  $BC$  и  $CD$ .

**8.96.** Постройте трапецию, боковые стороны которой лежат на данных прямых, диагонали пересекаются в данной точке, а одно из оснований имеет данную длину.

**8.97.** Даны две окружности. Проведите прямую так, чтобы она касалась одной окружности, а вторая окружность касалась на ней хорду данной длины.

**8.98.** Проведите через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  прямую  $l$  так, чтобы площади треугольников  $AA_1C$  и  $BB_1C$ , где  $A_1$  и  $B_1$  — проекции точек  $A$  и  $B$  на прямую  $l$ , были равны.

**8.99.** Постройте треугольник  $ABC$  по сторонам  $AB$  и  $AC$ , зная, что биссектриса  $AD$ , медиана  $BM$  и высота  $CH$  пересекаются в одной точке.

**8.100.** Даны точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , делящие стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  в отношении  $1:2$ . Восстановите по ним треугольник  $ABC$ .

### Решения

**8.1.** Построим отрезок  $BC$  длины  $a$ . Центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  является точкой пересечения двух окружностей радиуса  $R$  с центрами в точках  $B$  и  $C$ . Выберем одну из

этих точек пересечения и построим описанную окружность  $S$  треугольника  $ABC$ . Точка  $A$  является точкой пересечения окружности  $S$  и прямой, параллельной прямой  $BC$  и отстоящей от нее на расстояние  $h_a$  (таких прямых две).

8.2. Построим точки  $A_1$  и  $B_1$  на сторонах  $BC$  и  $AC$  соответственно так, что  $BA_1:A_1C=1:3$  и  $AB_1:B_1C=1:2$ . Пусть точка  $X$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Ясно, что  $S_{ABX}:S_{BCX}=1:2$  тогда и только тогда, когда точка  $X$  лежит на отрезке  $BB_1$ , и  $S_{ABX}:S_{ACX}=1:3$  тогда и только тогда, когда точка  $X$  лежит на отрезке  $AA_1$ . Поэтому искомая точка  $M$  является точкой пересечения отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ .

8.3. Пусть  $O$  — центр данной окружности,  $AB$  — хорда, проходящая через точку  $P$ ,  $M$  — середина  $AB$ . Тогда  $|AP-BP|=2PM$ . Так как  $\angle PMO=90^\circ$ , точка  $M$  лежит на окружности  $S$  с диаметром  $OP$ . Построим хорду  $PM$  окружности  $S$  так, что  $PM=a/2$  (таких хорд две). Искомая хорда задается прямой  $PM$ .

8.4. Пусть  $R$  — радиус данной окружности,  $O$  — ее центр. Центр искомой окружности лежит на окружности  $S$  радиуса  $R+r$  с центром  $O$ . С другой стороны, ее центр лежит на прямой  $l$ , параллельной данной прямой и удаленной от нее на расстояние  $r$  (таких прямых две). Любая точка пересечения окружности  $S$  и прямой  $l$  может служить центром искомой окружности.

8.5. Пусть  $R$  — радиус окружности  $S$ ,  $O$  — ее центр. Если окружность  $S$  высекает на прямой, проходящей через точку  $A$ , хорду  $PQ$  и  $M$  — середина  $PQ$ , то  $OM^2=OQ^2-MQ^2=R^2-d^2/4$ . Поэтому искомая прямая касается окружности радиуса  $\sqrt{R^2-d^2/4}$  с центром  $O$ .

8.6. Возьмем на прямых  $AB$  и  $CD$  точки  $E$  и  $F$  так, чтобы прямые  $BF$  и  $CE$  имели заданные направления. Рассмотрим всевозможные параллелограммы  $PQRS$  с заданными направлениями сторон, вершины  $P$  и  $R$  которых лежат на лучах  $BA$  и  $CD$ , а вершина  $Q$  — на стороне  $BC$  (рис. 85). Докажем, что геометрическим местом вершин  $S$  является отрезок  $EF$ . В самом деле,  $\frac{SR}{EC} = \frac{PQ}{EC} = \frac{BQ}{BC} = \frac{FR}{FC}$ , т. е. точка  $S$  лежит на отрезке  $EF$ . Обратно, если точка  $S'$  лежит на отрезке  $EF$ , то проведем  $S'P' \parallel BF$ ,  $P'Q' \parallel EC$  и  $Q'R' \parallel BF$  ( $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  — точки на прямых

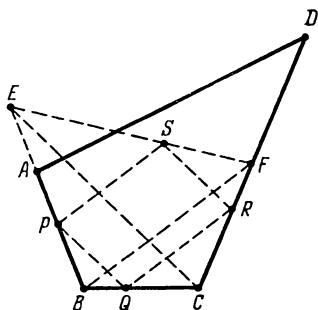


Рис. 85

$AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ). Тогда  $\frac{S'P'}{BF} = \frac{P'E}{BE} = \frac{Q'C}{BC} = \frac{Q'R'}{BF}$ , т. е.  $S'P' = Q'R'$  и  $P'Q'R'S'$  — параллелограмм.

Из этого вытекает следующее построение. Строим сначала точки  $E$  и  $F$ . Вершина  $S$  является точкой пересечения отрезков  $AD$  и  $EF$ . Дальнейшее построение очевидно.

8.7. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $A_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $CB$  и  $AB$ . Так как  $C_1A_1 \parallel AC$ , то  $\angle A_1C_1B = \angle A$ . Из этого вытекает следующее построение. Построим сначала отрезок  $CB$  длиной  $a$  и его середину  $A_1$ . Точка  $C_1$  является точкой пересечения окружности радиуса  $m_c$  с центром  $C$  и дуг окружностей, из которых отрезок  $A_1B$  виден под углом  $A$ . Построив точку  $C_1$ , отложим на луче  $BC_1$  отрезок  $BA = 2BC_1$ . Тогда  $A$  — искомая вершина треугольника.

8.8. Предположим, что искомый треугольник построен и  $C$  — вершина его прямого угла. Так как  $\angle ACB = 90^\circ$ , точка  $C$  лежит на окружности  $S$  с диаметром  $AB$ . Поэтому точка  $C$  является точкой пересечения окружности  $S$  и данной окружности. Построив точку  $C$  и проведя прямые  $CA$  и  $CB$ , найдем оставшиеся вершины искомого треугольника.

8.9. Предположим, что прямоугольник  $ABCD$  построен. Опустим из точки  $P$  перпендикуляр  $PR$  на прямую  $BC$ . Точку  $R$  можно построить, так как она лежит на окружности с диаметром  $PQ$  и  $PR = AB = a$ . Построив точку  $R$ , строим прямые  $BC$  и  $AD$  и опускаем на них перпендикуляры из точек  $M$  и  $N$ .

8.10. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен,  $AN$  — высота,  $AD$  — биссектриса,  $AM$  — медиана. Согласно задаче 2.67 точка  $D$  лежит между  $M$  и  $N$ . Точка  $E$  пересечения прямой  $AD$  и перпендикуляра, проведенного из точки  $M$  к стороне  $BC$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Поэтому центр  $O$  описанной окружности лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку  $AE$  и перпендикуляра к стороне  $BC$ , проведенного через точку  $M$ .

Последовательность построений такова: на произвольной прямой (которая в дальнейшем окажется прямой  $BC$ ) строим точку  $H$ , затем последовательно строим точки  $A$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $E$ ,  $O$ . Искомые вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  являются точками пересечения исходной прямой с окружностью радиуса  $OA$  с центром  $O$ .

8.11. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен и  $O$  — центр его описанной окружности. Тогда  $\angle BOC = 90^\circ + \angle A/2$  (задача 5.3). Из точки  $O$  отрезок  $BC$  виден под углом  $90^\circ + \angle A/2$ , и она удалена на расстояние  $r$  от прямой  $BC$ , поэтому ее можно построить. Затем строим вписанную окружность и проводим к ней касательные из точек  $B$  и  $C$ .

8.12. Построим произвольный треугольник с углами  $A$  и  $B$  и найдем его периметр  $P_1$ . Искомый треугольник подобен построенному треугольнику с коэффициентом  $P/P_1$ .

8.13. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — его медианы,  $M$  — точка их пересечения,  $M'$  — точка,

симметричная  $M$  относительно точки  $A_1$ . Тогда  $MM' = 2m_a/3$ ,  $MC = 2m_c/3$  и  $M'C = 2m_b/3$ , поэтому треугольник  $MM'C$  можно построить. Точка  $A$  симметрична  $M'$  относительно точки  $M$ , а точка  $B$  симметрична  $C$  относительно середины отрезка  $MM'$ .

8.14. Ясно, что  $BC:AC:AB = \frac{S}{h_a}:\frac{S}{h_b}:\frac{S}{h_c} = \frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$ . Возьмем произвольный отрезок  $B'C'$  и построим треугольник  $A'B'C'$  так, чтобы  $B'C':A'C' = h_b:h_a$  и  $B'C':A'B' = h_c:h_a$ . Пусть  $h'_a$  — высота треугольника  $A'B'C'$ , опущенная из вершины  $A'$ . Искомый треугольник подобен треугольнику  $A'B'C'$  с коэффициентом  $h_a/h'_a$ .

8.15. Возьмем на стороне  $AB$  произвольную точку  $K'$ , опустим из нее перпендикуляр  $K'L'$  на сторону  $BC$ , а затем построим квадрат  $K'L'M'N'$ , лежащий внутри угла  $ABC$ . Пусть прямая  $BN'$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $N$ . Ясно, что искомый квадрат является образом квадрата  $K'L'M'N'$  при гомотетии с центром  $B$  и коэффициентом  $BN:BN'$ .

8.16. Предположим, что искомый треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $Q$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ ,  $PQ$  — диаметр этой окружности,  $R$  — точка касания внеписанной окружности со стороной  $BC$ . Ясно, что  $BR = (a+b+c)/2 - c = (a+b-c)/2$  и  $BQ = (a+c-b)/2$ . Поэтому  $RQ = |BR - BQ| = |b - c|$ . Вписанная окружность треугольника  $ABC$  и внеписанная окружность, касающаяся стороны  $BC$ , гомотетичны с центром гомотетии  $A$ . Поэтому точка  $A$  лежит на прямой  $PR$  (рис. 86).

Из этого вытекает следующее построение. Строим прямоугольный треугольник  $PQR$  по известным катетам  $PQ = 2r$  и  $RQ = |b - c|$ . Затем проводим две прямые, параллельные прямой  $RQ$  и удаленные от нее на расстояние  $h_a$ . Вершина  $A$  является точкой пересечения одной из этих прямых с лучом  $RP$ . Так как длина диаметра  $PQ$  вписанной окружности известна, ее можно построить. Точки пересечения касательных к этой окружности, проведенных из точки  $A$ , с прямой  $RQ$  являются вершинами  $B$  и  $C$  треугольника.

8.17. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан  $AA_1$  и  $BB_1$ . Тогда  $AM = 2m_a/3$  и  $BM = 2m_b/3$ . Треугольник  $ABM$  можно построить по длинам сторон  $AB = c$ ,  $AM$  и  $BM$ . Затем на лучах  $AM$  и  $BM$  откладываем отрезки  $AA_1 = m_a$  и  $BB_1 = m_b$ . Вершина  $C$  является точкой пересечения прямых  $AB_1$  и  $A_1B$ .

8.18. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $H$  — основание высоты, опущенной из вершины  $A$ . Прямоугольный треугольник  $ACH$  можно построить по гипотенузе  $AC = b$  и катету  $AH = h_a$ . Затем на прямой  $CH$  строим точку  $B$  так, что  $CB = a$ .

8.19. Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Опустим из середины  $A_1$  стороны  $BC$  перпендикуляры  $A_1B'$  и  $A_1C'$  на прямые  $AC$  и  $AB$  соответственно. Ясно, что  $AA_1 = m_a$ ,  $A_1B' = h_b/2$

**8.20.** Построим угол  $B'AC'$ , равный  $\angle A$ . Точка  $B$  строится как пересечение луча  $AB'$  и прямой, параллельной лучу  $AC'$  и удаленной от него на расстоянии  $h_a$ . Аналогично строится точка  $C$ .

**8.21.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Опустим из точки  $B$  высоту  $BH$  и проведем медиану  $BB_1$ . В прямоугольных треугольниках  $CBH$  и  $B_1BH$  известны катет  $BH$  и гипотенузы  $CB$  и  $B_1B$ , поэтому их можно построить. Затем на луче  $CB_1$  откладываем отрезок  $CA = 2CB_1$ . Задача имеет два решения, так как треугольники  $CBH$  и  $B_1BH$  можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой  $BH$ .

**8.22.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $M$  — середина отрезка  $BC$ . Опустим из точки  $A$  высоту  $AH$ , а из точки  $M$  — перпендикуляр  $MD$  на сторону  $AC$ . Ясно, что  $MD = h_b/2$ . Поэтому треугольники  $AMD$  и  $AMH$  можно построить. Вершина  $C$  является точкой пересечения прямых  $AD$  и  $MH$ . На луче  $CM$  откладываем отрезок  $CB = 2CM$ . Задача имеет два решения, так как треугольники  $AMD$  и  $AMH$  можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой  $AM$ .

**8.23.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. В треугольнике  $CC_1B_1$  известны все стороны:  $CC_1 = m$ ,  $C_1B_1 = a/2$  и  $CB_1 = b/2$ , поэтому его можно построить. Точка  $A$  симметрична  $C$  относительно точки  $B_1$ , а точка  $B$  симметрична  $A$  относительно точки  $C_1$ .

**8.24.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен,  $AM$ —его медиана,  $AH$ —высота. Пусть точка  $A'$  симметрична  $A$  относительно точки  $M$ .

Построим отрезок  $AA' = 2m_a$ . Пусть  $M$ —его середина. Построим прямоугольный треугольник  $AMH$  с гипотенузой  $AM$  и катетом  $AH = h_a$ . Точка  $C$  лежит на дуге окружности, из которой отрезок  $AA'$  виден под углом  $180^\circ - \angle A$ , так как  $\angle ACA' = 180^\circ - \angle CAB$ . Поэтому точка  $C$  является точкой пересечения этой дуги и прямой  $MH$ . Точка  $B$  симметрична  $C$  относительно точки  $M$ .

**8.25.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $CD$ —его биссектриса. Проведем прямую  $MD$ , параллельную стороне  $BC$  (точка  $M$  лежит на стороне  $AC$ ). Треугольник  $CMD$  равнобедренный, так как  $\angle MCD = \angle DCB = \angle MDC$ . Поскольку  $MC:AM = DB:AD = CB:AC = a:b$  и  $AM + MC = b$ , то  $MC = ab/(a+b)$ . Строим равнобедренный треугольник  $CMD$  по основанию  $CD = l_c$  и боковым сторонам  $MD = MC = ab/(a+b)$ . Затем на луче  $CM$  откладываем отрезок  $CA = b$ , а на луче, симметричном лучу  $CM$  относительно прямой  $CD$ , откладываем отрезок  $CB = a$ .

**8.26.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $S_1$ —внеписанная окружность, касающаяся стороны  $BC$ . Обозначим точки касания окружности  $S_1$  с продолжениями сторон  $AB$  и  $AC$  через  $K$  и  $L$ , а точку касания  $S_1$  со стороной  $BC$  обозначим через  $M$ . Так как  $AK = AL$ ,  $AL = AC + CM$  и  $AK = AB + BM$ , то  $AK = AL = p$ . Пусть  $S_2$ —окружность радиуса  $h_a$  с центром  $A$ . Прямая  $BC$  является общей внутренней касательной к окружностям  $S_1$  и  $S_2$ .

Из этого вытекает следующее построение. Строим угол  $KAL$ , равный по величине углу  $A$ , так, что  $KA = LA = p$ . Строим окружность  $S_1$ , касающуюся сторон угла  $KAL$  в точках  $K$  и  $L$ , и окружность  $S_2$  радиуса  $h_a$  с центром в точке  $A$ . Затем проводим общую внутреннюю касательную к окружностям  $S_1$  и  $S_2$ . Точки пересечения этой касательной со сторонами угла  $KAL$  являются вершинами  $B$  и  $C$  искомого треугольника.

**8.27.** Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на окружности  $S$  с диаметром  $AB$ . Центр  $O$  этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде  $A_1B_1$ . Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим точку  $O$ , являющуюся точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку  $A_1B_1$  и прямой  $l$ . Затем строим окружность радиуса  $OA_1 = OB_1$  с центром  $O$ . Вершины  $A$  и  $B$  являются точками пересечения окружности  $S$  с прямой  $l$ . Вершина  $C$  является точкой пересечения прямой  $AB_1$  и прямой  $BA_1$ .

**8.28.** Пусть  $AB = BC$  и  $A_1, B_1, C_1$ —основания биссектрис треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle A_1C_1C = \angle C_1CA = \angle C_1CA_1$ , т. е. треугольник  $CA_1C_1$  равнобедренный и  $A_1C = A_1C_1$ .

Из этого вытекает следующее построение. Через точку  $B_1$  проводим прямую  $l$ , параллельную  $A_1C_1$ . На прямой  $l$  строим точ-

ку  $C$  так, что  $CA_1 = C_1A_1$  и  $\angle C_1A_1C > 90^\circ$ . Точка  $A$  симметрична точке  $C$  относительно точки  $B_1$ , а вершина  $B$  является точкой пересечения прямых  $AC_1$  и  $A_1C$ .

8.29. а) Согласно задаче 2.19,а) точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются точками пересечения продолжений высот треугольника  $A'B'C'$  с его описанной окружностью.

б) Согласно задаче 2.19,б) точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются точками пересечения продолжений биссектрис углов треугольника  $A'B'C'$  с его описанной окружностью.

8.30. Обозначим середины сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника через  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Поскольку  $BC \parallel B_1C_1 \parallel B'C'$  и  $OA_1 \perp BC$ , то  $OA' \perp B'C'$ . Аналогично  $OB' \perp A'C'$  и  $OC' \perp A'B'$ , т. е.  $O$  — точка пересечения высот треугольника  $A'B'C'$ . Построив точку  $O$ , проводим серединные перпендикуляры к отрезкам  $OA'$ ,  $OB'$ ,  $OC'$ . Эти прямые образуют треугольник  $ABC$ .

8.31. Согласно задаче 5.9 наша задача совпадает с задачей 8.29,б).

8.32. Пусть  $O$  — центр описанной окружности,  $M$  — середина стороны  $AB$ ,  $H$  — основание высоты, опущенной из точки  $C$ . Точка  $Q$  является серединой дуги  $AB$ , поэтому  $OQ \perp AB$ . Из этого вытекает следующее построение. Сначала по трем данным точкам строим описанную окружность  $S$  треугольника  $PQR$ . Точка  $C$  является точкой пересечения прямой, проведенной через точку  $P$  параллельно  $OQ$ , и окружности  $S$ . Точка  $M$  является точкой пересечения прямой  $OQ$  и прямой  $RC$ . Прямая  $AB$  проходит через точку  $M$  и перпендикулярна  $OQ$ .

8.33. Согласно задаче 5.2 точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются основаниями высот треугольника  $A_1B_1C_1$ .

8.34. Пусть  $H_1$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Согласно задаче 5.105  $OM:MH_1 = 1:2$  и точка  $M$  лежит на отрезке  $OH_1$ . Поэтому можно построить точку  $H_1$ . Затем проводим прямую  $H_1H^*$  и восставляем к этой прямой в точке  $H$  перпендикуляр  $l$ . Опустив из точки  $O$  перпендикуляр на прямую  $l$ , получаем точку  $C_1$  (середину отрезка  $AB$ ). На луче  $C_1M$  строим точку  $C$  так, что  $CC_1:MC_1 = 3:1$ . Точки  $A$  и  $B$  являются точками пересечения прямой  $l$  с окружностью радиуса  $CO$  с центром  $O$ .

8.35. Пусть  $O$  и  $I$  — центры описанной и вписанной окружностей,  $I_c$  — центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $AB$ . Описанная окружность треугольника  $ABC$  делит отрезок  $II_c$  пополам (задача 5.109,б), а отрезок  $II_c$  делит пополам дугу  $AB$ . Ясно также, что точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности с диаметром  $II_c$ . Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность  $S$  с диаметром  $II_c$  и окружность  $S_1$  с центром  $O$  и радиусом  $OD$ , где  $D$  — середина отрезка  $II_c$ . Окружности  $S$  и  $S_1$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Теперь можно построить вписанную окружность треугольника  $ABC$  и провести к ней касательные в точках  $A$  и  $B$ .

**8.36.** Предположим, что мы построили точки  $X$  и  $Y$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  так, что  $AX=BY$  и  $XY \parallel AC$ . Проведем  $YY_1 \parallel AB$  и  $Y_1C_1 \parallel BC$  (точки  $Y_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах  $AC$  и  $AB$ ). Тогда  $Y_1Y=AX=BY$ , т. е.  $BYY_1C$  — ромб и  $BY_1$  — биссектриса угла  $B$ .

Из этого вытекает следующее построение. Проводим биссектрису  $BY_1$ , затем прямую  $Y_1Y$ , параллельную стороне  $AB$  ( $Y$  лежит на  $BC$ ). Точка  $X$  теперь строится очевидным образом.

**8.37.** Пусть для определенности  $a < b$ . Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Возьмем на стороне  $AC$  точку  $D$  так, что  $\angle ABD = \angle BAC$ . Тогда  $\angle BDC = 2\angle BAC$  и  $\angle CBD = 3\angle BAC - \angle BAC = 2\angle BAC$ , т. е.  $CD = CB = a$ . В треугольнике  $BCD$  известны все стороны:  $CD = CB = a$  и  $DB = AD = b - a$ . Построив треугольник  $BCD$ , проводим луч  $BA$ , не пересекающий сторону  $CD$ , так, что  $\angle DBA = \angle DBC/2$ . Искомая вершина  $A$  является точкой пересечения прямой  $CD$  и этого луча.

**8.38.** Пусть точка  $B'$  лежит на прямой  $l$ , проходящей через точку  $B$  параллельно  $AC$ . Стороны треугольников  $ABC$  и  $AB'C$  высекают на прямой, параллельной  $AC$ , равные отрезки. Поэтому прямоугольники  $P'R'Q'S'$  и  $PRQS$ , вписанные в треугольники  $ABC$  и  $AB'C$  соответственно, равны, если точки  $R, Q, R'$  и  $Q'$  лежат на одной прямой.

Возьмем точку  $B'$  на прямой  $l$  так, что  $\angle B'AC = 90^\circ$ . В треугольник  $AB'C$  прямоугольник  $P'R'Q'S'$  с данной диагональю  $P'Q'$  вписывается очевидным образом ( $P' = A$ ). Проведя прямую  $R'Q'$ , находим вершины  $R$  и  $Q$  искомого прямоугольника.

**8.39.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $K$  и  $L$  — точки, в которых вневписанная окружность, касающаяся стороны  $BC$ , касается продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно. Так как  $AK = AL = p$ , то эту вневписанную окружность можно построить; остается провести к построенной окружности касательную через данную точку  $M$ .

**8.40.** Пусть продолжение биссектрисы  $CD$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  (с прямым углом  $C$ ) в точке  $P$ ,  $PQ$  — диаметр описанной окружности,  $O$  — ее центр. Тогда  $PD : PO = PQ : PC$ , т. е.  $PD \cdot PC = 2R^2 = 2m_c^2$ . Поэтому, проведя к окружности с диаметром  $CD$  касательную длиной  $\sqrt{2}m_c$ , легко построить отрезок длиной  $PC$ . Теперь в треугольнике  $OPC$  известны длины всех сторон.

**8.41.** Построим точку  $K$  на стороне  $AC$  так, что  $AK = BC - AB$ . Пусть точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ . Равенство  $AD + BD + AB = BC$  эквивалентно равенству  $AD + BD = AK$ . Для точки  $D$ , лежащей на отрезке  $AK$ , последнее равенство переписывается в виде  $AD + BD = AD + DK$ , а для точки  $D$ , не лежащей на отрезке  $AK$ , — в виде  $AD + BD = AD - DK$ . В первом случае  $BD = DK$ , а второй случай невозможен. Поэтому точка  $D$  является точкой пересечения перпендикуляра к отрезку  $BK$  и отрезка  $AC$ .



Рис. 88

Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность  $S$  с центром  $O$  и данным радиусом. На окружности  $S$  выбираем произвольную точку  $A$ . Строим точку  $L$  на окружности  $S$  так, что  $\angle AOL = 90^\circ$ . На отрезке  $AL$  строим отрезок  $AK$ , равный данной биссектрисе. Через точку  $K$  проводим прямую  $l$ , перпен-

**8.43.** Возьмем на сторонах  $BC$  и  $AC$  такие точки  $A_1$  и  $B_1$ , что  $PA_1 \parallel AC$  и  $PB_1 \parallel BC$ . Затем отложим на лучах  $A_1B$  и  $B_1A$  отрезки  $A_1B_2 = AB_1$  и  $B_1A_2 = BA_1$ . Докажем, что прямая  $A_2B_2$  искомая. В самом деле, пусть  $k = AP/AB$ . Тогда

$$\frac{B_1 A_2}{B_1 P} = \frac{(1-k)a}{ka} = \frac{(1-k)a + (1-k)b}{ka + kb} = \frac{CA_2}{CB_2},$$

**8.44.** Предположим, что треугольник  $ABC$  построен. Пусть  $B_1$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AC$ . В прямоугольном треугольнике  $AOB_1$  известны катет  $OB_1 = r$  и гипотенуза  $AO$ , поэтому можно построить угол  $OAB_1$ , а значит, и угол  $BAC$ . Пусть  $O_1$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $M$  — середина стороны  $BC$ . В прямоугольном треугольнике  $BO_1M$  известны катет  $O_1M = AH/2$  (см. решение задачи 5.105) и угол  $BO_1M$  (он равен  $\angle A$  или  $180^\circ - \angle A$ ), поэтому его можно построить. Затем можно определить длину отрезка  $OO_1 = \sqrt{R(R-2r)}$  (см. задачу 5.11, а). Итак, можно построить отрезки длиной  $R$  и  $OO_1 = d$ .

216

**8.45.** Пусть расстояние между данными параллельными прямыми равно  $a$ . Нужно провести через точки  $A$  и  $B$  параллельные прямые так, чтобы расстояние между ними было равно  $a$ . Для этого построим окружность на отрезке  $AB$  как на диаметре и найдем точки  $C_1$  и  $C_2$  пересечения этой окружности с окружностью радиуса  $a$  с центром  $B$ . Сторона искомого ромба лежит на прямой  $AC_1$  (второе решение — на прямой  $AC_2$ ). Затем через точку  $B$  проводим прямую, параллельную  $AC_1$  (соответственно  $AC_2$ ).

**8.46.** Предположим, что четырехугольник  $ABCD$  построен. Обозначим середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  через  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  соответственно и середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  через  $K$  и  $L$ . В треугольнике  $KSL$  известны  $KS = CD/2$ ,  $LS = AB/2$  и угол  $KSL$ , равный углу между сторонами  $AB$  и  $CD$ . Построив треугольник  $KSL$ , можно построить треугольник  $KRL$ , так как известны длины всех его сторон. После этого достраиваем треугольники  $KSL$  и  $KRL$  до параллелограммов  $KSLQ$  и  $KRLP$ . Вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  являются вершинами параллелограммов  $PLSA$ ,  $QKPB$ ,  $RLQC$ ,  $SKRD$  (рис. 89).

**8.47.** Опустим из вершин  $B$  и  $D$  перпендикуляры  $BB_1$  и  $DD_1$  на диагональ  $AC$ . Пусть для определенности  $DD_1 > BB_1$ . Построим отрезок длины  $a = DD_1 - BB_1$  и проведем прямую, параллельную прямой  $AC$ , удаленную от  $AC$  на расстояние  $a$  и пересекающую сторону  $CD$  в некоторой точке  $E$ . Ясно, что  $S_{AED} = (ED/CD) S_{ACD} = (BB_1/DD_1) S_{ACD} = S_{ABC}$ . Поэтому медиана треугольника  $AEC$  лежит на искомой прямой.

**8.48.** Пусть  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — середины равных сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ . Проведем серединные перпендикуляры  $l_1$  и  $l_2$  к отрезкам  $PQ$  и  $QR$ . Поскольку  $AB = BC = CD$ , точки  $B$  и  $C$  лежат на прямых  $l_1$  и  $l_2$  и  $BQ = QC$ .

Из этого вытекает следующее построение. Проводим серединные перпендикуляры  $l_1$  и  $l_2$  к отрезкам  $PQ$  и  $QR$ . Затем через точку  $Q$  проводим отрезок с концами на прямых  $l_1$  и  $l_2$  так, чтобы  $Q$  была его серединой (см. задачу 16.15).

**8.49.** Пусть даны вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  вписанного и описанного четырехугольника  $ABCD$ , причем  $AB \geq BC$ . Тогда  $AD - CD = AB - BC \geq 0$ , поэтому на стороне  $AD$  можно отложить отрезок  $DC_1$ , равный  $DC$ . В треугольнике  $AC_1C$  известны длины сторон  $AC$  и  $AC_1 = AB - BC$  и  $\angle AC_1C = 90^\circ + \angle D/2 = 180^\circ - \angle B/2$ . Так как угол  $AC_1C$  тупой, треугольник  $AC_1C$  по этим элементам строится однозначно. Дальнейшее построение очевидно.

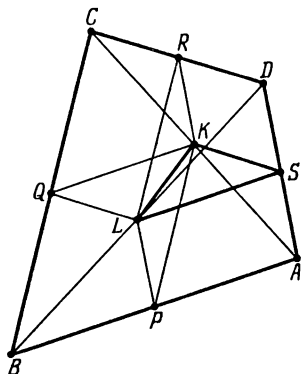


Рис. 89

**8.50.** Пусть  $ABCD$  — описанная равнобедренная трапеция с основаниями  $AD$  и  $BC$ , причем  $AD > BC$ ;  $C_1$  — проекция точки  $C$  на прямую  $AD$ . Докажем, что  $AB = AC_1$ . В самом деле, если  $P$  и  $Q$  — точки касания сторон  $AB$  и  $AD$  с вписанной окружностью, то  $AB = AP + PB = AQ + BC/2 = AQ + QC_1 = AC_1$ .

Из этого вытекает следующее построение. Пусть  $C_1$  — проекция точки  $C$  на основание  $AD$ . Тогда  $B$  — точка пересечения прямой  $BC$  и окружности радиуса  $AC_1$  с центром  $A$ . Трапеция с  $AD < BC$  строится аналогично.

**8.51.** Обозначим середины оснований  $AD$  и  $BC$  через  $L$  и  $N$ , а середину отрезка  $EF$  через  $M$ . Точки  $L$ ,  $O$ ,  $N$  лежат на одной прямой (задача 19.2). Ясно, что точка  $M$  также лежит на этой прямой. Из этого вытекает следующее построение. Проведем через точку  $K$  прямую  $l$ , перпендикулярную прямой  $OK$ . Основание  $AD$  лежит на прямой  $l$ . Точка  $L$  является точкой пересечения прямой  $l$  и прямой  $OM$ . Точка  $N$  симметрична точке  $L$  относительно точки  $M$ . Через точку  $O$  проведем прямые, параллельные прямым  $EN$  и  $FN$ . Точки пересечения этих прямых с прямой  $l$  являются вершинами  $A$  и  $D$  трапеции. Вершины  $B$  и  $C$  симметричны вершинам  $A$  и  $D$  относительно точек  $E$  и  $F$  соответственно.

**8.52.** Предположим, что мы построили четырехугольник  $ABCD$  с данными длинами сторон и данной средней линией  $KP$  ( $K$  и  $P$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ ). Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — точки, симметричные точкам  $A$  и  $B$  относительно точки  $P$ . Треугольник  $A_1BC$  можно построить, так как в нем известны стороны  $BC$ ,  $CA_1 = AD$  и  $BA_1 = 2KP$ . Построим треугольник  $A_1BC$  до параллелограмма  $A_1EBC$ . Теперь можно построить точку  $D_1$ , так как известны  $CD$  и  $ED = BA$ . Воспользовавшись тем, что  $DA = A_1C$ , построим точку  $A$ .

**8.53.** Используя формулы задач 6.34 и 6.35, легко выразить диагонали вписанного четырехугольника через его стороны. Полученные формулы можно использовать для построения диагоналей (для удобства следует ввести произвольный отрезок  $e$  в качестве отрезка единичной длины и строить отрезки длиной  $pq$ ,  $p/q$  и  $\sqrt{p}$  как  $pq/e$ ,  $pe/q$  и  $\sqrt{pe}$ ).

**8.54.** Окружность высекает на сторонах угла равные отрезки тогда и только тогда, когда ее центр лежит на биссектрисе угла. Поэтому центром искомой окружности является точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$  и биссектрисы данного угла.

**8.55.** Предположим, что мы построили окружность  $S'$ , касающуюся данной окружности  $S$  в точке  $A$  и данной прямой  $l$  в некоторой точке  $B$ . Пусть  $O$  и  $O'$  — центры окружностей  $S$  и  $S'$  соответственно (рис. 90). Ясно, что точки  $O$ ,  $O'$  и  $A$  лежат на одной прямой и  $O'B = O'A$ . Поэтому нужно построить точку  $O'$  на прямой  $OA$

так, чтобы  $O'A = O'B$ , где  $B$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O'$  на прямую  $l$ . Для этого опустим перпендикуляр  $OB'$  на прямую  $l$ . Затем отложим на прямой  $AO$  отрезок  $OA'$  длины  $OB'$ . Через точку  $A$  проведем прямую  $AB$ , параллельную  $A'B'$  (точка  $B$  лежит на прямой  $l$ ). Точка  $O'$  является точкой пересечения прямой  $OA$  и перпендикуляра к прямой  $l$ , проведенного через точку  $B$ .

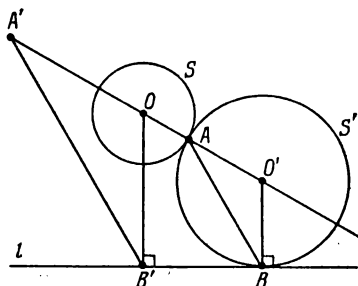


Рис. 90

8.56. а) Пусть  $l_1$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ ,  $C$  — точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l$ , а  $l'$  — прямая, симметричная  $l$  относительно прямой  $l_1$ . Задача сводится к тому, чтобы построить окружность, проходящую через точку  $A$  и касающуюся прямых  $l$  и  $l'$  (см. задачу 19.15).

б) Можно считать, что центр окружности  $S$  не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$  (иначе построение очевидно). Возьмем произвольную точку  $C$  окружности  $S$  и построим описанную окружность треугольника  $ABC$ ; она пересекает  $S$  в некоторой точке  $D$ . Пусть  $M$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Проведем к окружности  $S$  касательные  $MP$  и  $MQ$ . Тогда описанные окружности треугольников  $ABP$  и  $ABQ$  искомые, так как  $MP^2 = MQ^2 = MA \cdot MB$ .

8.57. Предположим, что мы построили окружности  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , попарно касающиеся в данных точках:  $S_1$  и  $S_2$  касаются в точке  $C$ ;  $S_1$  и  $S_3$  — в точке  $B$ ;  $S_2$  и  $S_3$  — в точке  $A$ . Пусть  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  — центры окружностей  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Тогда точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на сторонах треугольника  $O_1O_2O_3$ , причем  $O_1B = O_1C$ ,  $O_2C = O_2A$  и  $O_3A = O_3B$ . Поэтому точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются точками касания вписанной окружности треугольника  $O_1O_2O_3$  со сторонами.

Из этого вытекает следующее построение. Строим описанную окружность треугольника  $ABC$  и проводим к ней касательные в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Точки пересечения этих касательных являются центрами искомых окружностей.

8.58. Предположим, что мы построили окружность  $S$ , касательные  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  к которой имеют длины  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно ( $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки касания). Построим окружности  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$  с центрами  $A$ ,  $B$  и  $C$  и радиусами  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно (рис. 91). Если  $O$  — центр окружности  $S$ , то отрезки  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  являются как радиусами окружности  $S$ , так и касательными к окружностям  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$ . Поэтому точка  $O$  является радикальным центром окружностей  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$  (см. § 10 гл. 3).

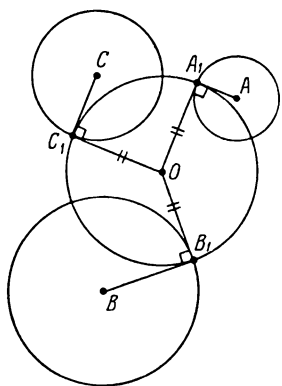


Рис. 91

Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим окружности  $S_a$ ,  $S_b$  и  $S_c$ . Затем строим их радикальный центр  $O$ . Искомая окружность является окружностью с центром  $O$  и радиусом, равным по длине касательной, проведенной из точки  $O$  к окружности  $S_a$ .

**8.59.** Построим сначала отрезок  $BC$  длиной  $a$ . Затем построим ГМТ  $X$ , для которых  $CX:BX=b:c$  (см. задачу 7.14). В качестве вершины  $A$  можно взять любую из точек пересечения этого ГМТ с прямой, удаленной от прямой  $BC$  на расстояние  $h_a$ .

**8.60.** По длинам отрезков  $AD'$  и  $BD$  можно построить отрезок  $AB$  и точку

$D$  на этом отрезке. Точка  $C$  является точкой пересечения окружности радиуса  $CD$  с центром  $D$  и ГМТ  $X$ , для которых  $AX:BX=AD:BD$ .

**8.61.** Пусть  $X$  — точка, не лежащая на прямой  $AB$ . Ясно, что  $\angle AXB = \angle BCX$  тогда и только тогда, когда  $AX:CX=AB:CB$ . Поэтому точка  $M$  является точкой пересечения ГМТ  $X$ , для которых  $AX:CX=AB:CB$ , и ГМТ  $Y$ , для которых  $BY:DY=BC:DC$  (эти ГМТ могут не пересекаться).

**8.62.** Нужно построить точку  $O$ , для которой  $AO:A'O=AB:A'B'$  и  $BO:B'O=AB:A'B'$ . Точка  $O$  является точкой пересечения ГМТ  $X$ , для которых  $AX:A'X=AB:A'B'$ , и ГМТ  $Y$ , для которых  $BY:B'Y=AB:A'B'$ .

**8.63.** Пусть  $O$  — центр данной окружности. Хорды  $XP$  и  $XQ$ , проходящие через точки  $A$  и  $B$ , равны тогда и только тогда, когда  $XO$  — биссектриса угла  $PXQ$ , т. е.  $AX:BX=AO:BO$ . Искомая точка  $X$  является точкой пересечения соответствующей окружности Аполлония с данной окружностью.

**8.64.** а) Если прямая  $l$  не пересекает отрезок  $AB$ , то  $ABB_1A_1$  — параллелограмм и  $l \parallel AB$ . Если прямая  $l$  пересекает отрезок  $AB$ , то  $AA_1BB_1$  — параллелограмм и  $l$  проходит через середину отрезка  $AB$ .

б) Одна из искомых прямых параллельна прямой  $AB$ , а другая проходит через середину  $AB$ .

**8.65.** Построим окружность радиуса 1 и проведем в ней два перпендикулярных диаметра  $AB$  и  $CD$ . Пусть  $O$  — центр окружности,  $M$  — середина отрезка  $OC$ ,  $P$  — точка пересечения прямой  $AM$  и окружности с диаметром  $OC$  (рис. 92). Тогда  $AM^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ , а значит,

$$AM^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ а значит,}$$

$$AP = AM - PM = (\sqrt{5} - 1)/2 = 2 \sin 18^\circ \quad (\text{см. задачу 5.46}), \text{ т. е. } AP —$$

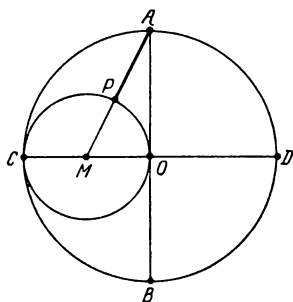


Рис. 92

длина стороны правильного десятиугольника, вписанного в данную окружность.

**8.66.** Предположим, что мы построили прямоугольник  $PQRS$  так, что данные точки  $A, B, C, D$  лежат на сторонах  $PQ, QR, RS, SP$  соответственно и  $PQ:QR=a$ , где  $a$  — данное отношение сторон. Пусть  $F$  — точка пересечения прямой, проведенной через точку  $D$  перпендикулярно к прямой  $AC$ , и прямой  $QR$ . Тогда  $DF:AC=a$ .

Из этого вытекает следующее построение. Из точки  $D$  проводим луч, пересекающий отрезок  $AC$  под прямым углом, и на этом луче строим точку  $F$  так, что  $DF=a \cdot AC$ . Сторона  $QR$  лежит на прямой  $BF$ . Дальнейшее построение очевидно.

**8.67.** Предположим, что точки  $X$  и  $Y$ , обладающие требуемыми свойствами, построены. Обозначим точку пересечения прямых  $AX$  и  $YC$  через  $M$ , а точку пересечения прямых  $AB$  и  $XY$  через  $K$ . Прямоугольные треугольники  $AХК$  и  $YХМ$  имеют общий острый угол  $X$ , поэтому  $\angle XAK = \angle XYM$ . Углы  $XAB$  и  $XYB$  опираются на одну дугу, поэтому  $\angle XAB = \angle XYB$ . Следовательно,  $\angle XYM = \angle XYB$ . Так как  $XY \perp AB$ , то  $K$  — середина отрезка  $CB$ .

Обратно, если  $K$  — середина отрезка  $CB$ , то  $\angle MYX = \angle BYX = \angle XAB$ . Треугольники  $AХК$  и  $YХМ$  имеют общий угол  $X$  и  $\angle XAK = \angle XYM$ , поэтому  $\angle YMX = \angle AKX = 90^\circ$ .

Из этого вытекает следующее построение. Через середину  $K$  отрезка  $CB$  проводим прямую  $l$ , перпендикулярную прямой  $AB$ . Точки  $X$  и  $Y$  являются точками пересечения прямой  $l$  с данной окружностью.

**8.68.** Если есть угол величиной  $\alpha$ , то можно построить углы величиной  $2\alpha, 3\alpha$  и т. д. Так как  $19 \cdot 19^\circ = 361^\circ$ , то можно построить угол  $361^\circ$ , совпадающий с углом  $1^\circ$ .

**8.69.** Построим сначала угол  $36^\circ$  (см. задачу 8.65). Затем можно построить угол  $(36^\circ - 30^\circ)/2 = 3^\circ$ . Если  $n$  не делится на 3, то, имея углы  $n^\circ$  и  $3^\circ$ , можно построить угол  $1^\circ$ . В самом деле, если  $n = 3k + 1$ , то  $1^\circ = n^\circ - k \cdot 3^\circ$ , а если  $n = 3k + 2$ , то  $1^\circ = 2n^\circ - (2k + 1) \cdot 3^\circ$ .

**8.70.** Последовательность построений такова. Выберем на клочке бумаги произвольную точку  $O$  и произведем гомотегию с центром  $O$  и достаточно малым коэффициентом  $k$  так, чтобы образ точки пересечения данных прямых при этой гомотегии оказался на клочке бумаги. Тогда можно построить биссектрису угла между образами прямых. Затем произведем гомотегию с прежним центром и коэффициентом  $1/k$  и получим искомый отрезок биссектрисы.

**8.71.** Построим с помощью двусторонней линейки две параллельные хорды  $AB$  и  $CD$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — точки пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ ,  $AD$  и  $BC$ . Тогда прямая  $PQ$  проходит через центр данной окружности. Построив аналогично еще одну такую прямую, найдем центр окружности.

**8.72.** Проведем через точку  $A$  два луча  $p$  и  $q$ , образующие угол маленькой величины, содержащий точку  $B$  (лучи можно построить, переставляя линейку). Через точку  $B$  проведем отрезки  $PQ_1$  и  $P_1Q$  (рис. 93). Если  $PQ < 10$  см и  $P_1Q_1 < 10$  см, то можно

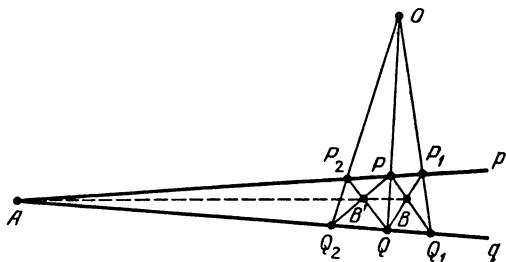


Рис. 93

построить точку  $O$ , в которой пересекаются прямые  $PQ$  и  $P_1Q_1$ . Проведем через точку  $O$  прямую  $P_2Q_2$ . Если  $PQ_2 < 10$  см и  $P_2Q < 10$  см, то можно построить точку  $B'$ , в которой пересекаются прямые  $PQ_2$  и  $P_2Q$ . Если  $BB' < 10$  см, то можно построить прямую  $BB'$ , а эта прямая проходит через точку  $A$  (см. задачу 5.67).

**8.73.** Построение будет основано на том факте, что если  $A$  и  $B$  — точки пересечения равных окружностей с центрами  $P$  и  $Q$ , то  $\vec{PA} = \vec{BQ}$ . Пусть  $S_1$  — исходная окружность,  $A_1$  — данная точка. Через точку  $A_1$  проведем окружность  $S_2$ , через точку  $A_2$  пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$  — окружность  $S_3$ , через точку  $A_3$  пересечения окружностей  $S_2$  и  $S_3$  — окружность  $S_4$ , наконец, через точки  $B_1$  и  $A_4$  пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_3$  с окружностью  $S_4$  — окружность  $S_5$ . Докажем, что точка  $B_2$  пересечения окружностей  $S_5$  и  $S_1$  искомая. Пусть  $Q_i$  — центр окружности  $S_i$ . Тогда  $A_1O_1 = O_2A_2 = A_3O_3 = O_4A_4 = B_1O_5 = O_1B_2$ .

**Замечание.** Точек пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_4$  две; в качестве точки  $B_1$  можно выбирать любую из них.

**8.74.** Пусть  $AB$ —данный отрезок,  $P$ —произвольная точка, не лежащая на данных прямых. Построим точки  $C$  и  $D$  пересечения второй из данных прямых с прямыми  $PA$  и  $PB$  соответственно и точку  $Q$  пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ . Согласно задаче 19.2 прямая  $PQ$  проходит через середину отрезка  $AB$ .

**8.75.** Пусть  $AB$ —данный отрезок, а  $C$  и  $D$ —произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить точку  $M$ —середину отрезка  $CD$ . Пусть  $P$ —точка пересечения прямых  $AM$  и  $BD$ ,  $E$ —точка пересечения прямых  $PC$  и  $AB$ . Докажем, что  $EB$ —искомый отрезок. Поскольку  $\triangle PMC \sim \triangle PAE$  и  $\triangle PMD \sim \triangle PAB$ , то

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AP} : \frac{AE}{AP} = \frac{MD}{MP} : \frac{MC}{MP} = \frac{MD}{MC} = 1.$$

**8.76.** Пусть  $AB$ —данный отрезок, а  $C$  и  $D$ —произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить такие точки  $D_1=D, D_2, \dots, D_n$ , что все отрезки  $D_i D_{i+1}$  равны отрезку  $CD$ . Пусть  $P$ —точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD_n$ , а  $B_1, \dots, B_{n-1}$ —точки пересечения прямой  $AB$  с прямыми  $PD_1, \dots, PD_{n-1}$  соответственно. Ясно, что точки  $B_1, \dots, B_{n-1}$  делят отрезок  $AB$  на  $n$  равных частей.

**8.77.** Возьмем на одной из данных прямых отрезок  $AB$  и построим его середину  $M$  (см. задачу 8.74). Пусть  $A_1$  и  $M_1$ —точки пересечения прямых  $PA$  и  $PM$  со второй данной прямой,  $Q$ —точка пересечения прямых  $BM_1$  и  $MA_1$ . Легко проверить, что прямая  $PQ$  параллельна данным прямым.

**8.78.** В случае, когда точка  $P$  не лежит на прямой  $AB$ , можно воспользоваться решением задачи 3.36. Если же точка  $P$  лежит на прямой  $AB$ , то мы можем сначала опустить перпендикуляры  $l_1$  и  $l_2$  из каких-нибудь других точек, а затем согласно задаче 8.77 провести через точку  $P$  прямую, параллельную прямым  $l_1$  и  $l_2$ .

**8.79.** а) Пусть  $A$ —данная точка,  $l$ —данная прямая. Рассмотрим сначала случай, когда точка  $O$  не лежит на прямой  $l$ . Проведем через точку  $O$  две произвольные прямые, пересекающие прямую  $l$  в точках  $B$  и  $C$ . Согласно задаче 8.78 в треугольнике  $OBC$  можно опустить высоты на стороны  $OB$  и  $OC$ . Пусть  $H$ —точка их пересечения. Тогда можно провести прямую  $OH$ , которая перпендикулярна  $l$ . Согласно задаче 8.78 можно опустить перпендикуляр из точки  $A$  на  $OH$ . Это и есть искомая прямая, проходящая через  $A$  и параллельная  $l$ . Чтобы из  $A$  опустить перпендикуляр на  $l$ , нужно восстановить из  $O$  перпендикуляр  $l'$  к  $OH$ , а затем из  $A$  опустить перпендикуляр на  $l'$ . В случае, когда точка  $O$  лежит на прямой  $l$ , согласно задаче 8.78 можно сразу



опустить из точки  $A$  перпендикуляр  $l'$  на прямую  $l$ , а затем из той же точки  $A$  восстановить перпендикуляр к прямой  $l'$ .

б) Пусть  $l$ —данная прямая,  $A$ —лежащая на ней данная точка и  $BC$ —данный отрезок. Проведем через точку  $O$  прямые  $OD$  и  $OE$ , параллельные прямой  $l$  и  $BC$  соответственно ( $D$  и  $E$ —точки пересечения этих прямых с окружностью  $S$ ). Через точку  $C$  проведем прямую, параллельную  $OB$ , до пересечения с прямой  $OE$  в точке  $F$ , через  $F$ —прямую, параллельную  $ED$ , до пересечения с  $OD$  в точке  $G$  и, наконец, через  $G$ —прямую, параллельную  $OA$ , до пересечения с  $l$  в точке  $H$ . Тогда  $AH=OG=OF=BC$ , т. е.  $AH$ —требуемый отрезок.

в) Возьмем две произвольные прямые, пересекающиеся в точке  $P$ . Отложим на одной из них отрезок  $PA=a$ , а на другой—отрезки  $PB=b$  и  $PC=c$ . Пусть  $D$ —точка пересечения прямой  $PA$  с прямой, проходящей через  $B$  и параллельной  $AC$ . Ясно, что  $PD=ab/c$ .

г) Пусть  $H$ —гомотетия (или параллельный перенос), переводящая окружность с центром  $A$  и радиусом  $r$  в окружность  $S$  (т. е. в заданную окружность с отмеченным центром  $O$ ). Так как радиусы обеих окружностей известны, можно построить образ любой точки  $X$  при отображении  $H$ . Для этого нужно через точку  $O$  провести прямую, параллельную прямой  $AX$ , и отложить на ней отрезок, равный  $r_s \cdot AX/r$ , где  $r_s$ —радиус окружности  $S$ . Аналогично строится образ любой точки при отображении  $H^{-1}$ . Поэтому можно построить прямую  $l'=H(l)$  и найти точки ее пересечения с окружностью  $S$ , а затем построить образы этих точек при отображении  $H^{-1}$ .

д) Пусть  $A$  и  $B$ —центры данных окружностей,  $C$ —одна из точек, которые нужно построить,  $CH$ —высота треугольника  $ABC$ . Записав теорему Пифагора для треугольников  $ACH$  и  $BCH$ , получим, что  $AH=(b^2+c^2-a^2)/2c$ . Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  известны, поэтому можно построить точку  $H$  и точки пересечения прямой  $CH$  с одной из данных окружностей.

**8.80.** а) Проведем прямые, параллельные прямым  $OA$  и  $OB$ , удаленные от последних на расстояние  $a$  и пересекающие стороны угла. Точка пересечения этих прямых лежит на искомой биссектрисе.

б) Проведем прямую, параллельную  $OB$ , удаленную от последней на расстояние  $a$  и пересекающую луч  $OA$  в некоторой точке  $M$ . Через точки  $O$  и  $M$  проведем другую пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно  $a$ ; прямая, проходящая через точку  $O$ , содержит искомую сторону угла.

**8.81.** Проведем через точку  $A$  произвольную прямую, а затем проведем прямые  $l_1$  и  $l_2$ , параллельные ей и удаленные от нее на расстояние  $a$ ; эти прямые пересекают прямую  $l$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Через точки  $A$  и  $M_1$  проведем еще одну пару параллельных прямых  $l_a$  и  $l_m$ , расстояние между которыми равно  $a$ . Точка пересечения прямых  $l_2$  и  $l_m$  лежит на искомом перпендикуляре.

**8.82.** Проведем прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние  $a$ . Теперь можно воспользоваться результатами задач 8.77 и 8.74.

**8.83.** Проведем через точку  $P$  прямые  $PA_1 \parallel OA$  и  $PB_1 \parallel OB$ . Пусть прямая  $PM$  делит пополам угол между прямыми  $l$  и  $PA_1$ . При симметрии относительно прямой  $PM$  прямая  $PA_1$  переходит в прямую  $l$ , поэтому прямая  $PB_1$  при этой симметрии переходит в одну из искомых прямых.

**8.84.** Построим треугольник  $ABM$  до параллелограмма  $ABMN$ . Проведем через точку  $N$  прямые, параллельные биссектрисам углов между прямыми  $l$  и  $MN$ . Точки пересечения этих прямых с прямой  $l$  искомые.

**8.85.** Проведем прямую  $l_1$ , параллельную прямой  $OA$  и удаленную от нее на расстояние  $a$ . Возьмем на прямой  $l$  произвольную точку  $B$ . Пусть  $B_1$  — точка пересечения прямых  $OB$  и  $l_1$ . Проведем через точку  $B_1$  прямую, параллельную  $AB$ ; эта прямая пересекает прямую  $OA$  в точке  $A_1$ . Проведем теперь через точки  $O$  и  $A_1$  пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно  $a$  (таких пар прямых может быть две); пусть  $X$  и  $X_1$  — точки пересечения прямой, проходящей через точку  $O$ , с прямыми  $l$  и  $l_1$ . Так как  $OA_1 = OX_1$  и  $\triangle OA_1X_1 \sim \triangle OAX$ , точка  $X$  искомая.

**8.86.** Восставим в точках  $O_1$  и  $O_2$  перпендикуляры к прямой  $O_1O_2$  и отложим на них отрезки  $O_1B_1 = O_2A_2$  и  $O_2B_2 = O_1A_1$ . Построим середину  $M$  отрезка  $B_1B_2$  и в точке  $M$  восставим перпендикуляр к  $B_1B_2$ . Этот перпендикуляр пересечет прямую  $O_1O_2$  в точке  $N$ . Тогда  $O_1N^2 + O_1B_1^2 = O_2N^2 + O_2B_2^2$ , а значит,  $O_1N^2 - O_1A_1^2 = O_2N^2 - O_2A_2^2$ , т. е. точка  $N$  лежит на радикальной оси. Остается восставить перпендикуляр к  $O_1O_2$  в точке  $N$ .

**8.87.** Построим сначала произвольную прямую  $l_1$ , перпендикулярную прямой  $l$ , а затем через точку  $A$  проведем прямую, перпендикулярную прямой  $l_1$ .

**8.88.** а) Проведем через точки  $A$  и  $B$  прямые  $AP$  и  $BQ$ , перпендикулярные прямой  $AB$ , а затем проведем произвольный перпендикуляр к прямой  $AP$ . В результате получим прямоугольник. Остается опустить из точки пересечения его диагоналей перпендикуляр на прямую  $AB$ .

б) Восставим из точки  $B$  перпендикуляр  $l$  к прямой  $AB$  и проведем через точку  $A$  две перпендикулярные прямые; они пересекают прямую  $l$  в точках  $M$  и  $N$ . Построим прямоугольный треугольник  $MAN$  до прямоугольника  $MANR$ . Основание перпендикуляра, опущенного из точки  $R$  на прямую  $AB$ , является искомой точкой  $C$ .

**8.89.** а) Опустим из точки  $A$  перпендикуляр  $AP$  на прямую  $OB$  и построим отрезок  $AC$ , серединой которого является точка  $P$ . Тогда угол  $AOC$  искомый.

б) Возьмем на прямой  $OB$  такие точки  $B$  и  $B_1$ , что  $OB = OB_1$ . Расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через

точки  $B$  и  $B_1$ , а вершина лежала на луче  $OA$ . Если  $A$  — вершина прямого угла, то угол  $AB_1B$  искомым.

**8.90.** Проведем через точку  $O$  прямую  $l'$ , параллельную прямой  $l$ . Из точки  $B$  опустим перпендикуляры  $BP$  и  $BQ$  на прямые  $l'$  и  $OA$ , а затем из точки  $O$  опустим перпендикуляр  $OX$  на прямую  $PQ$ . Тогда прямая  $XO$  искомая (см. задачу 2.3); если точка  $Y$  симметрична точке  $X$  относительно прямой  $l'$ , то прямая  $YO$  тоже искомая.

**8.91.** Построим треугольник  $OAB$  до параллелограмма  $OABC$ , а затем построим отрезок  $CC_1$ , серединой которого является точка  $O$ . Расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки  $C$  и  $C_1$ , а вершина лежала на прямой  $l$ . Вершина прямого угла совпадает тогда с искомой точкой  $X$ .

**8.92.** Построим отрезок  $AB$ , серединой которого является точка  $O$ , и расположим прямой угол так, чтобы его стороны проходили через точки  $A$  и  $B$ , а вершина лежала на прямой  $l$ . Тогда вершина прямого угла совпадает с искомой точкой.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

---

### Основные сведения

1. Для элементов треугольника используются следующие обозначения:

$a, b, c$  — длины сторон  $BC, CA, AB$ ;

$\alpha, \beta, \gamma$  — величины углов при вершинах  $A, B, C$ ;

$m_a, m_b, m_c$  — длины медиан, проведенных из вершин  $A, B, C$ ;

$h_a, h_b, h_c$  — длины высот, опущенных из вершин  $A, B, C$ ;

$l_a, l_b, l_c$  — длины биссектрис, проведенных из вершин  $A, B, C$ ;

$r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной окружностей.

2. Если  $A, B, C$  — произвольные точки, то  $AB \leq AC + CB$ , причем равенство достигается, только если точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$  (неравенство треугольника).

3. Медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон:  $m_a < (b + c)/2$  (задача 9.1).

4. Если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего (задача 9.27, б).

5. Сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы длин любой пары его противоположных сторон (задача 9.14).

6. Против большей стороны треугольника лежит больший угол (задача 9.59).

7. Длина отрезка, лежащего внутри выпуклого многоугольника, не превосходит либо наибольшей стороны, либо наибольшей диагонали (задача 10.64).

8. При решении некоторых задач этой главы нужно знать разные алгебраические неравенства. Сведения об этих неравенствах и их доказательства приведены в приложении к настоящей главе; с ними следует познакомиться, но нужно учесть, что они требуются только для решения достаточно сложных задач, а для решения простых задач понадобятся лишь неравенство  $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$  и следствия из него.

### Вводные задачи

1. Докажите, что  $S_{ABC} \leq AB \cdot BC/2$ .

2. Докажите, что  $S_{ABCD} \leq (AB \cdot BC + AD \cdot DC)/2$ .

3. Докажите, что  $\angle ABC > 90^\circ$  тогда и только тогда, когда точка  $B$  лежит внутри окружности с диаметром  $AC$ .

4. Радиусы двух окружностей равны  $R$  и  $r$ , а расстояния между их центрами равно  $d$ . Докажите, что эти окружности пересекаются тогда и только тогда, когда  $|R-r| < d < R+r$ .

5. Докажите, что любая диагональ четырехугольника меньше половины его периметра.

### § 1. Медиана треугольника

9.1. Докажите, что  $(a+b-c)/2 < m_c < (a+b)/2$ .

9.2. Докажите, что в любом треугольнике сумма медиан больше  $3/4$  периметра, но меньше периметра.

9.3. Даны  $n$  точек  $A_1, \dots, A_n$  и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку  $M$  так, что  $MA_1 + \dots + MA_n \geq n$ .

9.4. Точки  $A_1, \dots, A_n$  не лежат на одной прямой. Пусть две разные точки  $P$  и  $Q$  обладают тем свойством, что  $A_1P + \dots + A_nP = A_1Q + \dots + A_nQ = s$ . Докажите, что тогда  $A_1K + \dots + A_nK < s$  для некоторой точки  $K$ .

9.5. На столе лежит 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

### § 2. Алгебраические задачи на неравенство треугольника

В задачах этого параграфа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины сторон произвольного треугольника.

9.6. Докажите, что  $a=y+z$ ,  $b=x+z$  и  $c=x+y$ , где  $x$ ,  $y$  и  $z$  — положительные числа.

9.7. Докажите, что  $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$ .

9.8. При любом натуральном  $n$  из чисел  $a^n$ ,  $b^n$  и  $c^n$  можно составить треугольник. Докажите, что среди чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  есть два равных.

9.9. Докажите, что

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

9.10. Пусть  $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  и  $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ . Докажите, что  $|p-q| < 1$ .

9.11. Пять отрезков таковы, что из любых трех из них можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

9.12. Докажите, что

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc.$$

9.13. Докажите, что

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

### § 3. Сумма длин диагоналей четырехугольника

9.14. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник. Докажите, что  $AB + CD < AC + BD$ .

9.15. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, причем  $AB + BD \leq AC + CD$ . Докажите, что  $AB < AC$ .

9.16. Внутри выпуклого четырехугольника с суммой длин диагоналей  $d$  расположен выпуклый четырехугольник с суммой длин диагоналей  $d'$ . Докажите, что  $d' < 2d$ .

9.17. Дана замкнутая ломаная, причем любая другая замкнутая ломаная с теми же вершинами имеет большую длину. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.

9.18. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

9.19. На плоскости даны  $n$  красных и  $n$  синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести  $n$  отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

9.20. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

9.21. Пусть дан выпуклый  $(2n+1)$ -угольник  $A_1 A_3 A_5 \dots A_{2n+1} A_2 \dots A_{2n}$ . Докажите, что среди всех замкнутых ломаных с вершинами в его вершинах наибольшую длину имеет ломаная  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n+1} A_1$ .

### § 4. Разные задачи на неравенство треугольника

9.22. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

9.23. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

9.24. Докажите, что если длины сторон треугольника связаны неравенством  $a^2 + b^2 > 5c^2$ , то  $c$  — длина наименьшей стороны.

9.25. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Докажите, что третья высота меньше 30.

9.26. Точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  взяты на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  так, что  $BA_1 = \lambda \cdot BC$ ,  $CB_1 = \lambda \cdot CA$ ,  $AC_1 = \lambda \cdot AB$ , причем  $1/2 < \lambda < 1$ . Докажите, что периметр  $P$  треугольника  $ABC$  и периметр  $P_1$  треугольника  $A_1 B_1 C_1$  связаны неравенствами  $(2\lambda - 1)P < P_1 < \lambda P$ .

\* \* \*

9.27. а) Докажите, что при переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке периметр уменьшается. (Выпуклой оболочкой многоугольника называют наименьший выпуклый многоугольник, его содержащий.)

б) Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внешнего многоугольника не меньше, чем периметр внутреннего.

9.28. Внутри треугольника  $ABC$  периметра  $P$  взята точка  $O$ . Докажите, что  $P/2 < AO + BO + CO < P$ .

9.29. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  нашлась точка  $E$ , обладающая тем свойством, что периметры треугольников  $ABE$ ,  $BCE$  и  $CDE$  равны. Докажите, что тогда  $BC = AD/2$ .

См. также задачи 13.40, 20.11.

## § 5. Площадь треугольника не превосходит половины произведения двух сторон

9.30. Дан треугольник площадью 1 со сторонами  $a \leq b \leq c$ . Докажите, что  $b \geq \sqrt{2}$ .

9.31. Пусть  $E$ ,  $F$ ,  $G$  и  $H$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что  $S_{ABCD} \leq EG \cdot HF \leq (AB + CD)(AD + BC)/4$ .

9.32. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

9.33. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ . Докажите, что  $4S \leq AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$ , где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ .

9.34. В окружность радиуса  $R$  вписан многоугольник площади  $S$ , содержащий центр окружности, и на его сторонах выбрано по точке. Докажите, что периметр выпуклого многоугольника с вершинами в выбранных точках не меньше  $2S/R$ .

9.35. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  площадью  $S$  взята точка  $O$ , причем  $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$ . Докажите, что тогда  $ABCD$  — квадрат и  $O$  — его центр.

## § 6. Неравенства с площадями

9.36. Точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , причем  $AM = CN$  и  $AN = BM$ . Докажите, что площадь четырехугольника  $BMNC$  по крайней мере в три раза больше площади треугольника  $AMN$ .

9.37. Площади треугольников  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  равны  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  соответственно, причем  $AB = A_1B_1 + A_2B_2$ ,

$AC = A_1C_1 + A_2C_2$ ,  $BC = B_1C_1 + B_2C_2$ . Докажите, что  $S \leq 4\sqrt{S_1S_2}$ .

9.38.  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник площади  $S$ . Угол между прямыми  $AB$  и  $CD$  равен  $\alpha$ , угол между  $AD$  и  $BC$  равен  $\beta$ . Докажите, что

$$AB \cdot CD \sin \alpha + AD \cdot BC \sin \beta \leq 2S \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

9.39. Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Обозначим площади частей, на которые эти прямые разбивают треугольник, так, как показано на рис. 94. Докажите, что  $a/\alpha + b/\beta + c/\gamma \geq 3/2$ .

9.40. Площади треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны  $S$  и  $S_1$ , причем треугольник  $ABC$  не тупоугольный. Наибольшее из отношений  $a_1/a$ ,  $b_1/b$  и  $c_1/c$  равно  $k$ . Докажите, что  $S_1 \leq k^2S$ .

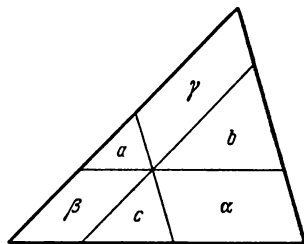


Рис. 94

9.41. а) Точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  делят (меньшую) дугу  $AE$  окружности на четыре равные части. Докажите, что  $S_{ACE} < 8S_{BCD}$ .

б) Из точки  $A$  проведены касательные  $AB$  и  $AC$  к окружности. Через середину  $D$  (меньшей) дуги  $BC$  проведена касательная, пересекающая отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $S_{BCD} < 2S_{MAN}$ .

9.42. Все стороны выпуклого многоугольника отодвигаются во внешнюю сторону на расстояние  $h$ . Докажите, что его площадь при этом увеличится больше чем на  $Ph + \pi h^2$ , где  $P$  — периметр.

9.43. Квадрат разрезан на прямоугольники. Докажите, что сумма площадей кругов, описанных около всех этих прямоугольников, не меньше площади круга, описанного около исходного квадрата.

9.44. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

9.45. а) Докажите, что в любом выпуклом шестиугольнике площади  $S$  найдется диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше  $S/6$ .

б) Докажите, что в любом выпуклом восьмиугольнике площади  $S$  найдется диагональ, отсекающая от него треугольник площади не больше  $S/8$ .

См. также задачу 17.19.



## § 7. Площадь. Одна фигура лежит внутри другой

**9.46.** Выпуклый многоугольник, площадь которого больше 0,5, помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что внутри многоугольника можно поместить отрезок длины 0,5, параллельный стороне квадрата.

**9.47.** Внутри квадрата со стороной 1 даны  $n$  точек. Докажите, что:

а) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках или вершинах квадрата не превосходит  $1/(2(n+1))$ ;

б) площадь одного из треугольников с вершинами в этих точках не превосходит  $1/(n-2)$ .

**9.48.** а) В круг площади  $S$  вписан правильный  $n$ -угольник площади  $S_1$ , а около этого круга описан правильный  $n$ -угольник площади  $S_2$ . Докажите, что  $S^2 > S_1 S_2$ .

б) В окружность, длина которой равна  $L$ , вписан правильный  $n$ -угольник периметра  $P_1$ , а около этой окружности описан правильный  $n$ -угольник периметра  $P_2$ . Докажите, что  $L^2 < P_1 P_2$ .

**9.49.** Многоугольник площади  $B$  вписан в окружность площади  $A$  и описан вокруг окружности площади  $C$ . Докажите, что  $2B \leq A + C$ .

**9.50.** В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из которых больше 1. Докажите, что эти треугольники пересекаются.

**9.51.** а) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади  $S$  и периметра  $P$  можно поместить круг радиуса  $S/P$ .

б) Внутри выпуклого многоугольника площади  $S_1$  и периметра  $P_1$  расположен выпуклый многоугольник площади  $S_2$  и периметра  $P_2$ . Докажите, что  $2S_1/P_1 > S_2/P_2$ .

**9.52.** Докажите, что площадь параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади треугольника.

**9.53.** Докажите, что площадь треугольника, вершины которого лежат на сторонах параллелограмма, не превосходит половины площади параллелограмма.

\* \* \*

**9.54.** Докажите, что любой остроугольный треугольник площади 1 можно поместить в прямоугольный треугольник площади  $\sqrt{3}$ .

**9.55.** а) Докажите, что выпуклый многоугольник площади  $S$  можно поместить в некоторый прямоугольник площади не более  $2S$ .

б) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади  $S$  можно вписать параллелограмм площади не менее  $S/2$ .

**9.56.** Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить треугольник, площадь которого не меньше: а)  $1/4$ ; б)  $3/8$ .

**9.57.** Выпуклый  $n$ -угольник помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдутся три такие вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  этого  $n$ -угольника, что площадь треугольника  $ABC$  не превосходит: а)  $8/n^2$ ; б)  $16\pi/n^3$ .

См. также задачу 15.6.

## § 8. Ломанные внутри квадрата

**9.58.** Внутри квадрата со стороной 1 расположена несамопересекающаяся ломаная длины 1000. Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая эту ломаную по крайней мере в 500 точках.

**9.59.** В квадрате со стороной 1 расположена ломаная длиной  $L$ . Известно, что каждая точка квадрата удалена от некоторой точки этой ломаной меньше чем на  $\varepsilon$ . Докажите, что тогда 
$$L \geq \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

**9.60.** Внутри квадрата со стороной 1 расположено  $n^2$  точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая все эти точки, длина которой не превосходит  $2n$ .

**9.61.** Внутри квадрата со стороной 100 расположена ломаная  $L$ , обладающая тем свойством, что любая точка квадрата удалена от  $L$  не больше чем на 0,5. Докажите, что на  $L$  есть две точки, расстояние между которыми не больше 1, а расстояние по  $L$  между ними не меньше 198.

## § 9. Четырехугольник

**9.62.** В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $B$  равны, а  $\angle D > \angle C$ . Докажите, что тогда  $AD < BC$ .

**9.63.** В трапеции  $ABCD$  углы при основании  $AD$  удовлетворяют неравенствам  $\angle A < \angle D < 90^\circ$ . Докажите, что тогда  $AC > BD$ .

**9.64.** Докажите, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче другой диагонали.

**9.65.** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

**9.66.** Угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$  тупой;  $F$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $2FA < BD + CD$ .

9.67. Дан четырехугольник  $ABCD$ . Докажите, что  $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$  (неравенство Птолемея).

9.68. Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что  $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$ .

9.69. Точка  $P$  лежит внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что сумма расстояний от точки  $P$  до вершин четырехугольника меньше суммы попарных расстояний между вершинами четырехугольника.

9.70. Диагонали делят выпуклый четырехугольник  $ABCD$  на четыре треугольника. Пусть  $P$  — периметр четырехугольника  $ABCD$ ,  $Q$  — периметр четырехугольника, образованного центрами вписанных окружностей полученных треугольников. Докажите, что  $PQ > 4S_{ABCD}$ .

9.71. Докажите, что расстояние от одной из вершин выпуклого четырехугольника до противоположной диагонали не превосходит половины этой диагонали.

9.72. Отрезок  $KL$  проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , а концы его лежат на сторонах  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что длина отрезка  $KL$  не превосходит длины одной из диагоналей.

9.73. В параллелограмм  $P_1$  вписан параллелограмм  $P_2$ , а в параллелограмм  $P_2$  вписан параллелограмм  $P_3$ , стороны которого параллельны сторонам  $P_1$ . Докажите, что длина хотя бы одной из сторон  $P_1$  не превосходит удвоенной длины параллельной ей стороны  $P_3$ .

См. также задачи 13.19, 15.3, а).

## § 10. Многоугольники

9.74. Докажите, что если углы выпуклого пятиугольника образуют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше  $36^\circ$ .

9.75. Пусть  $ABCDE$  — выпуклый пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1, причем  $AB=a$ ,  $BC=b$ ,  $CD=c$ ,  $DE=d$ ,  $AE=2$ . Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

9.76. Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 взята точка  $P$ . Докажите, что расстояния от точки  $P$  до некоторых трех вершин шестиугольника не меньше 1.

9.77. Докажите, что если стороны выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  равны 1, то радиус описанной окружности одного из треугольников  $ACE$  и  $BDF$  не превосходит 1

9.78. Длины сторон выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  меньше 1. Докажите, что длина одной из диагоналей  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  меньше 2.

9.79. Семиугольник  $A_1 \dots A_7$  вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри его, то сумма углов при вершинах  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $A_5$  меньше  $450^\circ$ .

\* \* \*

9.80. а) Докажите, что если длины проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые равны  $a$  и  $b$ , то его длина не меньше  $(a+b)/\sqrt{2}$ .

б) Длины проекций многоугольника на координатные оси равны  $a$  и  $b$ . Докажите, что его периметр не меньше  $\sqrt{2}(a+b)$ .

9.81. Докажите, что из сторон выпуклого многоугольника периметра  $P$  можно составить два отрезка, длины которых отличаются не более чем на  $P/3$ .

9.82. Внутри выпуклого многоугольника  $A_1 \dots A_n$  взята точка  $O$ . Пусть  $\alpha_k$  — величина угла при вершине  $A_k$ ,  $x_k = OA_k$ ,  $d_k$  — расстояние от точки  $O$  до прямой  $A_k A_{k+1}$ . Докажите, что  $\sum x_k \sin(\alpha_k/2) \geq \sum d_k$  и  $\sum x_k \cos(\alpha_k/2) \geq p$ , где  $p$  — полупериметр многоугольника.

9.83. Правильный  $2n$ -угольник  $M_1$  со стороной  $a$  лежит внутри правильного  $2n$ -угольника  $M_2$  со стороной  $2a$ . Докажите, что многоугольник  $M_1$  содержит центр многоугольника  $M_2$ .

9.84. Внутри правильного многоугольника  $A_1 \dots A_n$  взята точка  $O$ . Докажите, что по крайней мере один из углов  $A_i O A_j$  удовлетворяет неравенствам  $\pi(1-1/n) \leq \angle A_i O A_j \leq \pi$ .

9.85. Докажите, что при  $n \geq 7$  внутри выпуклого  $n$ -угольника найдется точка, сумма расстояний от которой до вершин больше периметра.

9.86. а) Выпуклые многоугольники  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$  таковы, что все их соответственные стороны, кроме  $A_1 A_n$  и  $B_1 B_n$ , равны и  $\angle A_2 \geq \angle B_2$ , ...,  $\angle A_{n-1} \geq \angle B_{n-1}$ , причем хотя бы одно из неравенств строгое. Докажите, что  $A_1 A_n > B_1 B_n$ .

б) Соответственные стороны неравных многоугольников  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$  равны. Запишем возле каждой вершины многоугольника  $A_1 \dots A_n$  знак разности  $\angle A_i - \angle B_i$ . Докажите, что при  $n \geq 4$  соседних вершин с разными знаками будет по крайней мере четыре пары. (Вершины с нулевой разностью выбрасываются из рассмотрения: две вершины, между которыми стоят только вершины с нулевой разностью, считаются соседними.)

См. также задачи 4.37, 4.53, 13.42.

## § 11. Разные задачи

**9.87.** На отрезке длиной  $l$  дано  $n$  точек. Докажите, что сумма расстояний от некоторой точки отрезка до этих точек не меньше  $n/2$ .

**9.88.** В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть провод из точки  $A$  в точку  $B$ , расстояние между которыми равно  $l$ . Докажите, что для этой цели ему достаточно куска провода длиной  $1,6l$ .

**9.89.** В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту меньше 100 м. Докажите, что этот лес можно огородить забором длиной 200 м.

**9.90.** Многоугольник (не обязательно выпуклый), вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного многоугольника быть больше, чем периметр исходного?

\* \* \*

**9.91.** Докажите, что замкнутую ломаную длины  $l$  можно поместить в круг радиуса  $0,25$ .

**9.92.** Остроугольный треугольник расположен внутри описанной окружности. Докажите, что ее радиус не меньше радиуса описанной окружности треугольника.

Верно ли это утверждение для тупоугольного треугольника?

**9.93.** Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше  $4R$ .

См. также задачи 14.23, 20.4.

### Задачи для самостоятельного решения

**9.94.** Два отрезка делят прямоугольник  $ABCD$  на четыре прямоугольника. Докажите, что площадь одного из прямоугольников, прилежающих к вершинам  $A$  и  $C$ , не превосходит четверти площади  $ABCD$ .

**9.95.** Докажите, что если  $AB + BD = AC + CD$ , то серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  четырехугольника  $ABCD$  пересекает отрезок  $AD$ .

**9.96.** Докажите, что если диагональ  $BD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  делит пополам диагональ  $AC$  и  $AB > BC$ , то  $AD < DC$ .

**9.97.** Основания описанной трапеции равны 2 и 11. Докажите, что продолжения ее боковых сторон пересекаются под острым углом.

**9.98.** Основания трапеции равны  $a$  и  $b$ , а высота равна  $h$ . Докажите, что длина одной из ее диагоналей не менее  $\sqrt{h^2 + (b+a)^2/4}$ .

**9.99.** Вершины  $n$ -угольника  $M_1$  являются серединами сторон выпуклого  $n$ -угольника  $M$ . Докажите, что при  $n \geq 3$  периметр  $M_1$  не меньше половины периметра  $M$ , а при  $n \geq 4$  площадь  $M_1$  не меньше половины площади  $M$ .

**9.100.** В окружность радиуса 1 вписан многоугольник, длины сторон которого заключены между 1 и  $\sqrt{2}$ . Найдите число его сторон.

## Приложение. Некоторые неравенства

1. Наиболее часто используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел*:  $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ , где  $a$  и  $b$  — положительные числа. Это неравенство следует из того, что  $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ; равенство достигается, только если  $a=b$ .

Из этого неравенства следует несколько полезных неравенств, например

$$x(a-x) \leq ((x+a-x)/2)^2 = a^2/4;$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a(1/a)} = 2 \text{ при } a > 0.$$

2. При решении некоторых задач используется *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для  $n$  положительных чисел*:  $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + \dots + a_n)/n$ , причем равенство достигается, только если  $a_1 = \dots = a_n$ .

Докажем сначала это неравенство для чисел вида  $n=2^m$  индукцией по  $m$ . Для  $m=1$  неравенство было доказано выше. Предположим, что оно доказано для  $m$ , и докажем его для  $m+1$ . Ясно, что  $a_k a_{k+2^m} \leq ((a_k + a_{k+2^m})/2)^2$ . Поэтому

$$(a_1 a_2 \dots a_{2^{m+1}})^{1/2^{m+1}} \leq (b_1 b_2 \dots b_{2^m})^{1/2^m},$$

где  $b_k = (a_k + a_{k+2^m})/2$ , а по предположению индукции

$$(b_1 \dots b_{2^m})^{1/2^m} \leq \frac{1}{2^m} (b_1 + \dots + b_{2^m}) = \frac{1}{2^{m+1}} (a_1 + \dots + a_{2^{m+1}}).$$

Пусть теперь  $n$  любое. Тогда  $n < 2^{m+1}$  для некоторого  $m$ . Положим  $a_{n+1} = \dots = a_{2^{m+1}} = (a_1 + \dots + a_n)/n = A$ . Ясно, что

$(a_1 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + \dots + a_{2^n}) = nA + (2^n - n)A = 2^n A$   
и  $a_1 \dots a_{2^n} = a_1 \dots a_n \cdot A^{2^n - n}$ . Поэтому  $a_1 \dots a_n \cdot A^{2^n - n} \leq$

$\leq (2^n A / 2^n)^{2^n} = A^{2^n}$ , т. е.  $a_1 \dots a_n \leq A^n$ ; равенство достигается, только если  $a_1 = \dots = a_n$ .

3. Для произвольных чисел  $a_1, \dots, a_n$  справедливо неравенство  $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$ . В самом деле,

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \leq \sum a_i^2 + \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) = n \sum a_i^2.$$

4. Так как  $\int_0^\alpha \cos t \, dt = \sin \alpha$  и  $\int_0^\alpha \sin t \, dt = 1 - \cos \alpha$ , то, исходя из неравенства  $\cos t \leq 1$ , получим  $\sin \alpha \leq \alpha$ , затем  $1 - \cos \alpha \leq \alpha^2/2$  (т. е.  $\cos \alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ ),  $\sin \alpha \geq \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ ,  $\cos \alpha \leq 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$  и т. д. (неравенства справедливы при всех  $\alpha \geq 0$ ).

5. Докажем, что  $\operatorname{tg} \alpha \geq \alpha$  при  $0 \leq \alpha < \pi/2$ . Пусть  $AB$  — касательная к окружности радиуса 1 с центром  $O$ , причем  $B$  — точка касания;  $C$  — точка пересечения луча  $OA$  с окружностью,  $S$  — площадь сектора  $BOC$ . Тогда  $\alpha = 2S < 2S_{AOB} = \operatorname{tg} \alpha$ .

6. На участке от 0 до  $\pi/2$  функция  $f(x) = x/\sin x$  монотонно возрастает, так как  $f'(x) = (\operatorname{tg} x - x)/(\cos x \sin^2 x) > 0$ . В частности,  $f(\alpha) \leq f(\pi/2)$ , т. е.  $\alpha/\sin \alpha \leq \pi/2$  при  $0 < \alpha < \pi/2$ .

7. Если  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , то  $f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . В самом деле, существует такой угол  $\varphi$ , что  $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$  и  $\sin \varphi = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ , поэтому  $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi - x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . Равенство достигается, только если  $\varphi = x + 2k\pi$ , т. е.  $\cos x = a/\sqrt{a^2 + b^2}$  и  $\sin x = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ .

## Решения

9.1. Пусть  $C_1$  — середина стороны  $AB$ . Тогда  $CC_1 + C_1A > CA$  и  $BC_1 + C_1C > BC$ . Поэтому  $2CC_1 + BA > CA + BC$ , т. е.  $m_c > (a + b - c)/2$ .

Пусть точка  $C'$  симметрична  $C$  относительно точки  $C_1$ . Тогда  $CC_1 = C_1C'$  и  $BC' = CA$ . Поэтому  $2m_c = CC' < CB + BC' = CB + CA$ , т. е.  $m_c < (a + b)/2$ .

9.2. Из предыдущей задачи следует  $m_a < (b + c)/2$ ,  $m_b < (a + c)/2$  и  $m_c < (a + b)/2$ , поэтому сумма длин медиан меньше периметра.

Пусть  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Тогда  $BO + OA > BA$ ,  $AO + OC > AC$  и  $CO + OB > CB$ . Складывая эти неравенства и учитывая, что  $AO = 2m_a/3$ ,  $BO = 2m_b/3$ ,  $CO = 2m_c/3$ , получаем  $m_a + m_b + m_c > 3(a + b + c)/4$ .

**9.3.** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — диаметрально противоположные точки окружности. Тогда  $M_1A_k + M_2A_k \geq M_1M_2 = 2$ . Складывая эти неравенства для  $k=1, \dots, n$ , получаем  $(M_1A_1 + \dots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \dots + M_2A_n) \geq 2n$ . Поэтому либо  $M_1A_1 + \dots + M_1A_n \geq n$ , и тогда положим  $M = M_1$ , либо  $M_2A_1 + \dots + M_2A_n \geq n$ , и тогда положим  $M = M_2$ .

**9.4.** В качестве  $K$  можно взять середину отрезка  $PQ$ . В самом деле, тогда  $A_iK \leq (A_iP + A_iQ)/2$  (см. задачу 9.1), причем хотя бы одно неравенство строгое, так как точки  $A_i$  не могут все лежать на прямой  $PQ$ .

**9.5.** Пусть  $A_i$  и  $B_i$  — положения конца минутных стрелок часов с номером  $i$  в моменты  $t$  и  $t+30$  мин,  $O_i$  — центр  $i$ -х часов, а  $O$  — центр стола. Тогда  $OO_i \leq (OA_i + OB_i)/2$  для любого  $i$  (см. задачу 9.1). Ясно, что в некоторый момент точки  $A_i$  и  $B_i$  не лежат на прямой  $O_iO$ , т. е. по крайней мере одно из  $n$  неравенств становится строгим. Тогда либо  $OO_1 + \dots + OO_n < OA_1 + \dots + OA_n$ , либо  $OO_1 + \dots + OO_n < OB_1 + \dots + OB_n$ .

**9.6.** Решая систему уравнений  $x+y=c$ ,  $x+z=b$ ,  $y+z=a$ , получаем  $x = (-a+b+c)/2$ ,  $y = (a-b+c)/2$ ,  $z = (a+b-c)/2$ . Положительность чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  следует из неравенства треугольника.

**9.7.** По неравенству треугольника  $a^2 > (b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$ ,  $b^2 > a^2 - 2ac + c^2$  и  $c^2 > a^2 - 2ab + b^2$ . Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

**9.8.** Можно считать, что  $a \geq b \geq c$ . Докажем, что  $a=b$ . В самом деле, если  $b < a$ , то  $b \leq \lambda a$  и  $c \leq \lambda a$ , где  $\lambda < 1$ . Поэтому  $b^n + c^n \leq 2\lambda^n a^n$ . При достаточно большом  $n$  имеем  $2\lambda^n < 1$  и получаем противоречие с неравенством треугольника.

**9.9.** Так как  $c(a-b)^2 + 4abc = c(a+b)^2$ , то  $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 = a((b-c)^2 - a^2) + b((c-a)^2 - b^2) + c((a+b)^2 - c^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ . (Последнее равенство проверяется простым вычислением.) Все три сомножителя положительны в силу неравенства треугольника.

**9.10.** Легко проверить, что  $abc|p-q| = |(b-c)(c-a)(a-b)|$ . А так как  $|b-c| < a$ ,  $|c-a| < b$  и  $|a-b| < c$ , то  $|(b-c)(c-a)(a-b)| < abc$ .

**9.11.** Обозначим длины отрезков так, что  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ . Если все треугольники, которые можно составить из этих отрезков, не остроугольные, то  $a_3^2 \geq a_1^2 + a_2^2$ ,  $a_4^2 \geq a_2^2 + a_3^2$  и  $a_5^2 \geq a_3^2 + a_4^2$ . Поэтому  $a_3^2 \geq a_1^2 + a_4^2 \geq (a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 + a_3^2) \geq 2a_1^2 + 3a_2^2$ . Так как  $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2$ , то  $2a_1^2 + 3a_2^2 > a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2$ . Приходим к неравенству  $a_3^2 > (a_1 + a_2)^2$ , противоречащему неравенству треугольника.

**9.12.** Первое решение. Введем новые переменные  $x = -a+b+c$ ,  $y = a-b+c$ ,  $z = a+b-c$ . Тогда  $a = (y+z)/2$ ,  $b = (x+z)/2$ ,  $c = (x+y)/2$ , т. е. нужно доказать неравенство  $xyz \leq (x+y)(y+z) \times (x+z)/8$  или  $6xyz \leq x(y^2+z^2) + y(x^2+z^2) + z(x^2+y^2)$ . Последнее неравенство следует из того, что  $2xyz \leq x(y^2+z^2)$ ,  $2xyz \leq y(x^2+z^2)$ ,  $2xyz \leq z(x^2+y^2)$ , так как  $x, y, z$  — положительные числа.



Второе решение. Так как  $2S = ab \sin \gamma$  и  $\sin \gamma = c/2R$ , то  $abc = 4SR$ . По формуле Герона  $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 8S^2/p$ . Поэтому нужно доказать, что  $8S^2/p \leq 4SR$ , т. е.  $2S \leq pR$ . Так как  $S = pr$ , приходим к неравенству  $2r \leq R$  (см. задачу 10.26).

9.13. Введем новые переменные  $x = (-a+b+c)/2$ ,  $y = (a-b+c)/2$  и  $z = (a+b-c)/2$ . Тогда числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  положительны и  $a = y+z$ ,  $b = x+z$ ,  $c = x+y$ . Несложные, но несколько громоздкие вычисления показывают, что  $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = 2(x^3z + y^3x + z^3y - xyz(x+y+z)) = 2xyz \left( \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z \right)$ . Так как  $2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,

то  $2x \leq x \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = \frac{x^2}{y} + y$ . Аналогично  $2y \leq y \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) = \frac{y^2}{z} + z$  и  $2z \leq z \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) = \frac{z^2}{x} + x$ . Складывая эти неравенства, получаем  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$ .

9.14. Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ . Тогда  $AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OB) + (OC + OD) > AB + CD$ .

9.15. Согласно предыдущей задаче  $AB + CD < AC + BD$ . Складывая это неравенство с неравенством  $AB + BD \leq AC + CD$ , получаем  $2AB < 2AC$ .

9.16. Докажем сначала, что если  $P$  — периметр выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , а  $d_1$  и  $d_2$  — длины его диагоналей, то  $P > d_1 + d_2 > P/2$ . Ясно, что  $AC < AB + BC$  и  $AC < AD + DC$ , поэтому  $AC < (AB + BC + CD + AD)/2 = P/2$ . Аналогично  $BD < P/2$ . Следовательно,  $AC + BD < P$ . С другой стороны, складывая неравенства  $AB + CD < AC + BD$  и  $BC + AD < AC + BD$  (см. задачу 9.14), получаем  $P < 2(AC + BD)$ .

Пусть  $P$  — периметр внешнего четырехугольника,  $P'$  — периметр внутреннего. Тогда  $d > P/2$ , а так как  $P' < P$  (задача 9.27, б), то  $d' < P' < P < 2d$ .

9.17. Пусть ломаная наименьшей длины самопересекающаяся. Рассмотрим два пересекающихся звена. Вершины этих звеньев могут соединяться одним из трех способов (рис. 95). Рассмотрим новую

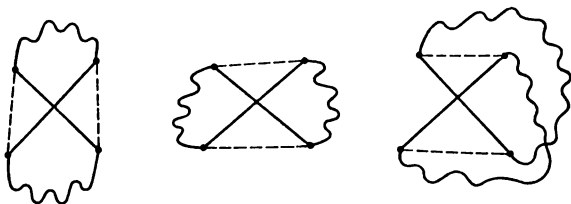


Рис. 95

ломаную, у которой два пересекающихся звена заменены на штриховые звенья (см. рис. 95). При этом снова получается замкнутая ломаная, но ее длина меньше, чем у исходной, так как сумма длин противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы длин диагоналей. Получено противоречие, поэтому замкнутая ломаная наименьшей длины не может иметь пересекающихся звеньев.

**9.18.** Докажем, что число сторон у такого многоугольника не больше 5. Предположим, что все диагонали многоугольника  $A_1 \dots A_n$  имеют одинаковую длину и  $n \geq 6$ . Тогда отрезки  $A_1 A_4$ ,  $A_1 A_5$ ,  $A_2 A_4$  и  $A_2 A_5$  имеют одинаковую длину, так как они являются диагоналями этого многоугольника. Но в выпуклом четырехугольнике  $A_1 A_2 A_4 A_5$  отрезки  $A_1 A_5$  и  $A_2 A_4$  являются противоположными сторонами, а  $A_1 A_4$  и  $A_2 A_5$  — диагоналями. Поэтому  $A_1 A_5 + A_2 A_4 < A_1 A_4 + A_2 A_5$ . Получено противоречие.

Ясно также, что правильный пятиугольник и квадрат удовлетворяют требуемому условию.

**9.19.** Рассмотрим все разбиения данных точек на пары разноцветных точек. Этих разбиений конечное число, поэтому найдется разбиение, для которого сумма длин отрезков, заданных парами точек разбиения, наименьшая. Покажем, что тогда эти отрезки не будут пересекаться. В самом деле, если бы два отрезка пересекались, то мы смогли бы выбрать разбиение с меньшей суммой длин отрезков, заменив диагонали выпуклого четырехугольника на его противоположные стороны (рис. 96).

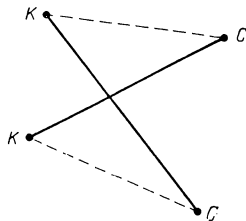


Рис. 96

**9.20.** Пусть  $A_p A_{p+1}$  и  $A_q A_{q+1}$  — несмежные стороны  $n$ -угольника  $A_1 \dots A_n$  (т. е.  $|p - q| \geq 2$ ). Тогда  $A_p A_{p+1} + A_q A_{q+1} < A_p A_q + A_{p+1} A_{q+1}$ . Запишем все такие неравенства и сложим их. Для каждой стороны найдется ровно  $n - 3$  несмежных с ней сторон, поэтому любая сторона входит в  $n - 3$  неравенства, т. е. в левой части полученной суммы стоит  $(n - 3)p$ , где  $p$  — сумма длин сторон  $n$ -угольника. Диагональ  $A_m A_n$  входит в два неравенства: для  $p = n$ ,  $q = m$  и для  $p = n - 1$ ,  $q = m - 1$ , поэтому в правой части стоит  $2d$ , где  $d$  — сумма длин диагоналей. Итак,  $(n - 3)p < 2d$ . Следовательно,  $p/n < d/(n(n - 3)/2)$ , что и требовалось.

**9.21.** Рассмотрим произвольную замкнутую ломаную с вершинами в вершинах данного многоугольника. Если у нее есть два непересекающихся звена, то, заменив эти звенья на диагонали заданного ими четырехугольника, мы увеличим сумму длин звеньев; при этом, однако, одна замкнутая ломаная может распасться на две. Докажем, что в случае нечетного числа звеньев после нескольких таких операций в конце концов получится все же замкнутая ломаная (так

как сумма длин звеньев каждый раз увеличивается, таких операций возможно лишь конечное число). Одна из получившихся замкнутых ломаных должна иметь нечетное число звеньев, но тогда любое из оставшихся звеньев не пересекается хотя бы с одним из звеньев этой ломаной (см. задачу 23.1, а), значит, в конце концов, получится лишь одна замкнутая ломаная.

Будем теперь последовательно строить ломаную с попарно пересекающимися звеньями (рис. 97). Например, вершина 10 должна лежать внутри заштрихованного треугольника, поэтому расположение вершин именно такое, как на рис. 97. Значит, выпуклому многоугольнику  $A_1 A_3 A_5 \dots A_{2n+1} A_2 \dots A_{2n}$  соответствует ломаная  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n+1} A_1$ .

**9.22.** Пусть длина третьей стороны равна  $n$ . По неравенству треугольника  $3,14 - 0,67 < n < 3,14 + 0,67$ . Так как  $n$  — целое число, то  $n = 3$ .

**9.23.** Ясно, что  $AB + BC > AC$ ,  $BC + CD > BD$ ,  $CD + DE > CE$ ,  $DE + EA > DA$ ,  $EA + AB > EB$ . Складывая все эти неравенства, получаем, что сумма длин диагоналей пятиугольника меньше удвоенного периметра.

Сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон «лучей звезды», а она в свою очередь больше периметра пятиугольника (рис. 98).

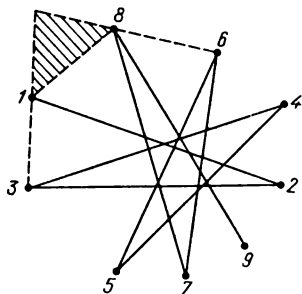


Рис. 97

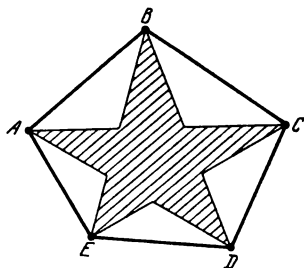


Рис. 98

**9.24.** Предположим, что  $c$  — не наименьшая сторона, например  $a \leq c$ . Тогда  $a^2 \leq c^2$  и  $b^2 < (a+c)^2 \leq 4c^2$ . Поэтому  $a^2 + b^2 < 5c^2$ . Получено противоречие.

**9.25.** Так как  $c > |b-a|$  и  $a = 2S/h_a$ ,  $b = 2S/h_b$ ,  $c = 2S/h_c$ , то  $\frac{1}{h_c} > \left| \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right|$ . Значит, в нашем случае  $h_c < 20 \cdot 12/8 = 30$ .

**9.26.** Возьмем на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  точки  $C_2$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  так, что  $A_1 B_2 \parallel AB$ ,  $B_1 C_2 \parallel BC$ ,  $C_1 A_2 \parallel CA$  (рис. 99). Тогда  $A_1 B_1 < A_1 B_2 + B_2 B_1 = (1-\lambda)AB + (2\lambda-1)CA$ . Аналогично  $B_1 C_1 < (1-\lambda)BC + (2\lambda-1)AB$  и  $C_1 A_1 < (1-\lambda)CA + (2\lambda-1)BC$ . Складывая эти неравенства, получаем  $P_1 < \lambda P$ .

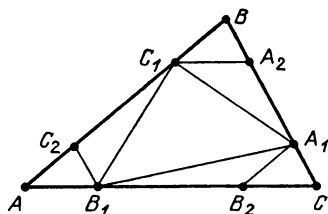


Рис. 99

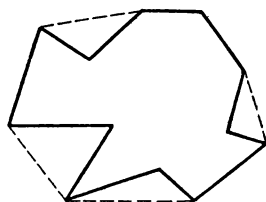


Рис. 100

Ясно, что  $A_1B_1 + A_1C > B_1C$ , т. е.  $A_1B_1 + (1-\lambda)BC > \lambda \cdot CA$ . Аналогично  $B_1C_1 + (1-\lambda)CA > \lambda \cdot AB$  и  $C_1A_1 + (1-\lambda)AB > \lambda \cdot BC$ . Складывая эти неравенства, получаем  $P_1 > (2\lambda - 1)P$ .

9.27. а) При переходе от невыпуклого многоугольника к его выпуклой оболочке некоторые ломаные, образованные сторонами, замещаются прямолинейными отрезками (рис. 100). Остается заметить, что длина ломаной больше длины отрезка с теми же концами.

б) Построим на сторонах внутреннего многоугольника полуполосы, обращенные наружу; параллельные края полуполос перпендикулярны соответствующей стороне многоугольника (рис. 101). Обозначим через  $P$  ту часть периметра внешнего многоугольника, которая находится внутри этих полуполос. Тогда периметр внутреннего многоугольника не превосходит  $P$ , а внешнего больше  $P$ .

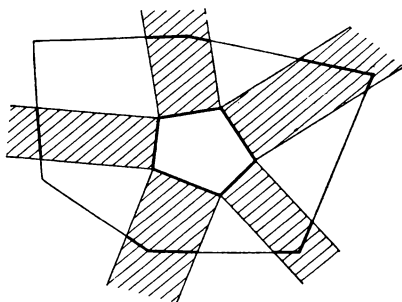


Рис. 101

9.28. Так как  $AO + BO > AB$ ,  $BO + OC > BC$  и  $CO + OA > AC$ , то  $AO + BO + CO > (AB + BC + CA)/2$ .

Поскольку треугольник  $ABC$  содержит треугольник  $ABO$ , то  $AB + BO + OA < AB + BC + CA$  (см. задачу 9.27, б), т. е.  $BO + OA < BC + CA$ . Аналогично  $AO + OC < AB + BC$  и  $CO + OB < CA + AB$ . Складывая эти неравенства, получаем  $AO + BO + CO < AB + BC + CA$ .

9.29. Достаточно доказать, что  $ABCE$  и  $BCDE$  — параллелограммы. Построим треугольник  $ABE$  до параллелограмма  $ABC_1E$ . Тогда периметры треугольников  $BC_1E$  и  $ABE$  равны, поэтому равны периметры треугольников  $BC_1E$  и  $BCE$ . Следовательно,  $C_1 = C$ , так как иначе один из треугольников  $BC_1E$  и  $BCE$  лежит внутри другого и их периметры не могут быть равны. Поэтому  $ABCE$  — параллелограмм. Аналогично доказывается, что  $BCDE$  — параллелограмм.

9.30. Ясно, что  $2 = 2S = ab \sin \gamma \leq ab \leq b^2$ , т. е.  $b \geq \sqrt{2}$ .

9.31. Так как  $EH$  — средняя линия треугольника  $ABD$ , то  $S_{AEN} = S_{ABD}/4$ . Аналогично  $S_{CFG} = S_{CBD}/4$ . Поэтому  $S_{AEN} + S_{CFG} = S_{ABCD}/4$ . Аналогично  $S_{BFE} + S_{DGH} = S_{ABCD}/4$ . Следовательно,  $S_{ABCD} = 2S_{EFGH} = EG \cdot HF \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между прямыми  $EG$  и  $HF$ . Так как  $\sin \alpha \leq 1$ , то  $S_{ABCD} \leq EG \cdot HF$ .

Складывая равенства  $\vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BC} + \vec{CG}$  и  $\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DG}$ , получаем  $2\vec{EG} = (\vec{EB} + \vec{EA}) + (\vec{BC} + \vec{AD}) + (\vec{DG} + \vec{CG}) = \vec{BC} + \vec{AD}$ . Поэтому  $EG \leq (BC + AD)/2$ . Аналогично  $HF \leq (AB + CD)/2$ . Следовательно,

$$S_{ABCD} \leq EG \cdot HF \leq (AB + CD)(BC + AD)/4.$$

9.32. Согласно задаче 9.31  $S_{ABCD} \leq (AB + CD)(BC + AD)/4$ . Так как  $ab \leq (a + b)^2/4$ , то  $S_{ABCD} \leq (AB + CD + AD + BC)^2/16 = 1$ .

9.33. Опустим из точек  $B$  и  $C$  перпендикуляры  $BB_1$  и  $CC_1$  на прямую  $AM$ . Тогда  $2S_{AMB} + 2S_{AMC} = AM \cdot BB_1 + AM \cdot CC_1 \leq AM \cdot BC$ , так как  $BB_1 + CC_1 \leq BC$ . Аналогично  $2S_{BMC} + 2S_{BMA} \leq BM \cdot AC$  и  $2S_{CMA} + 2S_{CMB} \leq CM \cdot AB$ . Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

9.34. Пусть на сторонах  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  выбраны точки  $B_1, \dots, B_n$ ;  $O$  — центр окружности. Пусть далее  $S_k = S_{OB_kA_{k+1}B_{k+1}} = (OA_{k+1} \cdot B_k B_{k+1} \sin \varphi)/2$ , где  $\varphi$  — угол между  $OA_{k+1}$  и  $B_k B_{k+1}$ . Так как  $OA_{k+1} = R$  и  $\sin \varphi \leq 1$ , то  $S_k \leq (R \cdot B_k B_{k+1})/2$ . Поэтому  $S = S_1 + \dots + S_n \leq R(B_1B_2 + \dots + B_nB_1)/2$ , т. е. периметр многоугольника  $B_1B_2 \dots B_n$  не меньше  $2S/R$ .

9.35. Имеем  $2S_{AOB} \leq AO \cdot OB \leq (AO^2 + BO^2)/2$ , причем равенство возможно, только если  $\angle AOB = 90^\circ$  и  $AO = BO$ . Аналогично  $2S_{BOC} \leq (BO^2 + CO^2)/2$ ,  $2S_{COD} \leq (CO^2 + DO^2)/2$  и  $2S_{DOA} \leq (DO^2 + AO^2)/2$ . Складывая эти неравенства, получаем  $2S = 2(S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}) \leq AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ , причем равенство возможно, только если  $AO = BO = CO = DO$  и  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$ , т. е.  $ABCD$  — квадрат и точка  $O$  — его центр.

9.36. Нужно доказать, что  $S_{ABC}/S_{AMN} \geq 4$ . Так как  $AB = AM + MB = AM + AN = AN + NC = AC$ , то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN} = \frac{(AM + AN)^2}{AM \cdot AN} \geq 4.$$

9.37. Воспользуемся формулой Герона:  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ . Так как  $p-a = (p_1-a_1) + (p_2-a_2)$ , а  $(x+y)^2 \geq 4xy$ , то  $(p-a)^2 \geq 4(p_1-a_1)(p_2-a_2)$ . Аналогично  $(p-b)^2 \geq 4(p_1-b_1)(p_2-b_2)$ ,  $(p-c)^2 \geq 4(p_1-c_1)(p_2-c_2)$  и  $p^2 \geq 4p_1p_2$ . Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

9.38. Для определенности можно считать, что пересекаются лучи  $BA$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  (рис. 102). Тогда, если достроить треугольник  $ADC$  до параллелограмма  $ADCK$ , точка  $K$  окажется внутри четырехугольника  $ABCD$ . Поэтому  $2S \geq 2S_{ABK} + 2S_{BCK} = AB \cdot AK \sin \alpha +$

$+ BC \cdot CK \sin \beta = AB \cdot CD \sin \alpha + BC \cdot AD \sin \beta$ .  
Равенство достигается, если точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ .

Пусть точка  $D'$  симметрична точке  $D$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $AC$ . Тогда  $2S = 2S_{ABCD'} = 2S_{ABD'} + 2S_{BCD'} \leq \leq AB \cdot AD' + BC \cdot CD' = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ .

**9.39.** Согласно неравенству между средним геометрическим и средним ариф-

метическим  $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \geq 3 \sqrt[3]{abc/(\alpha\beta\gamma)} = 3/2$ , так как  $\alpha = 2\sqrt{bc}$ ,  $\beta = 2\sqrt{ca}$

и  $\gamma = 2\sqrt{ab}$  (см. задачу 1.33).

**9.40.** Неравенства  $\alpha < \alpha_1$ ,  $\beta < \beta_1$  и  $\gamma < \gamma_1$  не могут выполняться одновременно. Поэтому, например,  $\alpha_1 \leq \alpha \leq 90^\circ$ , а значит,  $\sin \alpha_1 \leq \sin \alpha$ . Следовательно,  $2S_1 = a_1 b_1 \sin \alpha_1 \leq k^2 ab \sin \alpha = 2k^2 S$ .

**9.41.** а) Пусть хорды  $AE$  и  $BD$  пересекают диаметр  $CM$  в точках  $K$  и  $L$ . Тогда  $AC^2 = CK \cdot CM$  и  $BC^2 = CL \cdot CM$ . Значит,  $CK/CL = AC^2/BC^2 < 4$ . Кроме того,  $AE/BD = AE/AC < 2$ . Следовательно,  $S_{ACE}/S_{BCD} = AE \cdot CK/(BD \cdot CL) < 8$ .

б) Пусть  $H$  — середина отрезка  $BC$ . Так как  $\angle CBD = \angle BCD = \angle ABD$ , то  $D$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ . Поэтому  $AD/DH = AB/BH > 1$ . Следовательно,  $S_{MAN} > S_{ABC}/4$  и  $S_{BCD} = BC \cdot DH/2 < BC \cdot AH/4 = S_{ABC}/2$ .

**9.42.** Отрежем от полученного многоугольника прямоугольники со стороной  $h$ , построенные внешним образом на сторонах исходного многоугольника (рис. 103). При этом кроме исходного многоугольника останутся еще некоторые четырехугольники, из которых можно

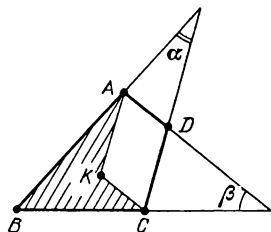


Рис. 102

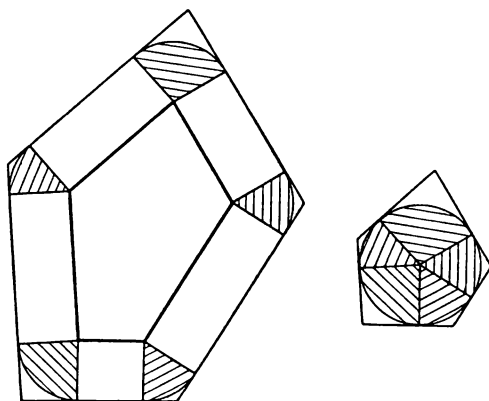


Рис. 103

составить многоугольник, описанный около окружности радиуса  $h$ . Сумма площадей этих четырехугольников больше площади окружности радиуса  $h$ , т. е. больше  $\pi h^2$ . Ясно также, что сумма площадей отрезанных прямоугольников равна  $Ph$ .

**9.43.** Пусть  $s, s_1, \dots, s_n$  — площади квадрата и составляющих его прямоугольников,  $S, S_1, \dots, S_n$  — площади описанных около них кругов. Докажем, что  $s_k \leq 2S_k/\pi$ . В самом деле, если стороны прямоугольника равны  $a$  и  $b$ , то  $s_k = ab$  и  $S_k = \pi R^2$ , где  $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$ . Поэтому  $s_k = ab \leq (a^2 + b^2)/2 = 2\pi R^2/\pi = 2S_k/\pi$ . Следовательно,  $2S/\pi = s = s_1 + \dots + s_n \leq 2(S_1 + \dots + S_n)/\pi$ .

**9.44.** Пусть для определенности  $ABC$  — треугольник наименьшей площади. Обозначим точку пересечения диагоналей  $AD$  и  $EC$  через  $F$ . Тогда  $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{ABCF}$ . Так как точка  $F$  лежит на отрезке  $EC$  и  $S_{EAB} \geq S_{CAB}$ , то  $S_{EAB} \geq S_{FAB}$ . Аналогично  $S_{DCB} \geq S_{FCB}$ . Поэтому  $S_{ABCF} = S_{FAB} + S_{FCB} \leq S_{EAB} + S_{DCB}$ . Следовательно,  $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{EAB} + S_{DCB}$ ; это даже более сильное неравенство, чем требовалось.

**9.45.** а) Обозначим точки пересечения диагоналей  $AD$  и  $CF$ ,  $CF$  и  $BE$ ,  $BE$  и  $AD$  через  $P, Q, R$  соответственно (рис. 104). Четырехугольники  $ABCP$  и  $CDEQ$  не имеют общих внутренних точек, так как стороны  $CP$  и  $QC$  лежат на прямой  $CF$ , а отрезки  $AB$  и  $DE$  — по разные стороны от нее. Аналогично четырехугольники  $ABCP, CDEQ$  и  $EFAR$  не имеют попарно общих внутренних точек. Поэтому сумма их площадей не превосходит  $S$ . Следовательно, сумма площадей треугольников  $ABP, BCP, CDQ, DEQ, EFR, FAR$  не превосходит  $S$ , т. е. площадь одного из них, например  $ABP$ , не превосходит  $S/6$ . Точка  $P$  лежит на отрезке  $CF$ , поэтому либо точка  $C$ , либо точка  $F$  удалена от прямой  $AB$  не больше, чем точка  $P$ . Следовательно, либо  $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S/6$ , либо  $S_{ABF} \leq S_{ABP} \leq S/6$ .

б) Пусть  $ABCDEFGH$  — выпуклый восьмиугольник. Докажем сначала, что четырехугольники  $ABEF, BCFG, CDGH$  и  $DEHA$  имеют общую точку. Ясно, что пересечением  $ABEF$  и  $CDGH$  является некоторый выпуклый четырехугольник  $KLMN$  (рис. 105). Отрезки  $AF$  и  $HC$  лежат внутри углов  $DAH$  и  $AHE$  соответственно, поэтому точка  $K$  лежит внутри четырехугольника  $DEHA$ . Аналогично доказывается, что точка  $M$  лежит внутри четырехугольника  $DEHA$ , т. е. весь отрезок  $KM$  лежит внутри его. Аналогично отрезок  $LN$  лежит внутри четырехугольника  $BCFG$ . Точка пересечения диагоналей  $KM$  и  $LN$  принадлежит всем нашим четырехугольникам; обозначим ее  $O$ . Разобьем восьмиугольник на треугольники, соединив точку  $O$  с вершинами. Площадь одного из этих треугольников, например  $ABO$ , не превосходит  $S/8$ . Отрезок  $AO$  пересекает сторону  $KL$  в некоторой точке  $P$ , поэтому  $S_{ABP} \leq S_{ABO} \leq S/8$ . Так как точка

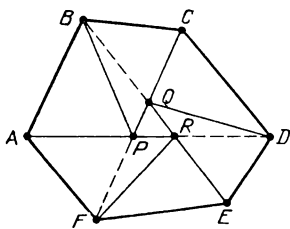


Рис. 104

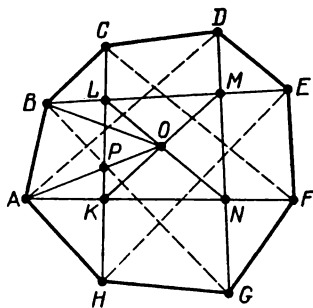


Рис. 105

$P$  лежит на диагонали  $CH$ , то либо  $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S/8$ , либо  $S_{ABH} \leq S_{ABP} \leq S/8$ .

**9.46.** Проведем через все вершины многоугольника прямые, параллельные одной паре сторон квадрата, и разобьем тем самым квадрат на полоски. Каждая такая полоска отрезает от многоугольника трапецию или треугольник. Достаточно доказать, что длина одного из оснований этих трапеций больше 0,5. Предположим, что длины оснований всех трапеций не превосходят 0,5. Тогда площадь каждой трапеции не превосходит половины высоты полоски, ее заключающей. Поэтому площадь многоугольника, равная сумме площадей трапеций и треугольников, на которые он разрезан, не превосходит половины суммы высот полосок, т. е. не превосходит 0,5. Получено противоречие.

**9.47. а)** Пусть  $P_1, \dots, P_n$  — данные точки. Соединим точку  $P_1$  с вершинами квадрата. При этом получится четыре треугольника. Затем для  $k=2, \dots, n$  продолжим следующую операцию. Если точка  $P_k$  лежит строго внутри одного из полученных ранее треугольников, то соединим ее с вершинами этого треугольника. Если точка  $P_k$  лежит на общей стороне двух треугольников, то соединим ее с вершинами этих треугольников, противоположными общей стороне. После каждой такой операции в обоих случаях число треугольников увеличивается на два. В результате получится  $2(n+1)$  треугольников. Сумма площадей этих треугольников равна 1, поэтому площадь одного из них не превосходит  $1/(2(n+1))$ .

**б)** Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данные точки. Пусть он имеет  $k$  вершин. Если  $k=n$ , то этот  $k$ -угольник можно разбить на  $n-2$  треугольников, диагоналями, выходящими из одной вершины. Если же  $k < n$ , то внутри  $k$ -угольника лежит  $n-k$  точек и его можно разбить на треугольник способом, указанным в предыдущей задаче. При этом получится  $k+2(n-k-1) = 2n-k-2$  треугольников. Так как  $k < n$ , то  $2n-k-2 > n-2$ .

Сумма площадей треугольников разбиения меньше 1, а их количество не меньше  $n-2$ , поэтому площадь хотя бы одного из них не превосходит  $1/(n-2)$ .



**9.48.** а) Можно считать, что описанный  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$  и вписанный  $n$ -угольник  $B_1 \dots B_n$  расположены так, что прямые  $A_i B_i$  пересекаются в центре  $O$  данного круга. Пусть  $C_i$  и  $D_i$  — середины сторон  $A_i A_{i+1}$  и  $B_i B_{i+1}$ . Тогда  $S_{OB_i C_i} = p \cdot OB_i \cdot OC_i$ ,  $S_{OB_i D_i} = p \cdot OB_i \cdot OD_i$  и  $S_{OA_i C_i} = p \cdot OA_i \cdot OC_i$ , где  $p = (\sin \angle A_i OC_i)/2$ . Так как  $OA_i : OC_i = OB_i : OD_i$ , то  $S_{OB_i C_i}^2 = S_{OB_i D_i} \cdot S_{OA_i C_i}$ . Остается заметить, что площадь части круга, заключенной внутри угла  $A_i OC_i$ , больше  $S_{OB_i C_i}$ , а площади частей вписанного и описанного  $n$ -угольников, заключенных внутри этого угла, равны  $S_{OB_i D_i}$  и  $S_{OA_i C_i}$ .

б) Пусть радиус окружности равен  $R$ . Тогда  $P_1 = 2nR \sin(\pi/n)$ ,  $P_2 = 2nR \operatorname{tg}(\pi/n)$  и  $L = 2\pi R$ . Нужно доказать, что  $\sin x \operatorname{tg} x > x^2$  при  $0 < x \leq \pi/3$ . Так как  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \geq \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36}$  и  $0 < \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{24}$  (см. приложение в конце главы), остается prove, что  $1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36} \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ , т. е.  $12x^2 > x^4$ . При  $x \leq \pi/3$  это неравенство выполняется.

**9.49.** Пусть  $O$  — центр гомотетии, переводящей вписанную окружность в описанную. Разобьем плоскость лучами, выходящими из точки  $O$  и проходящими через вершины многоугольника и точки касания его сторон с вписанной окружностью (рис. 106). Достаточно доказать требуемое неравенство для частей кругов и многоугольника, заключенных внутри каждого из образованных этими лучами углов. Пусть стороны угла пересекают вписанную и описанную окружности в точках  $P$ ,  $Q$  и  $R$ ,  $S$  соответственно, причем  $P$  — точка касания, а  $S$  — вершина многоугольника. Площади частей кругов больше площадей треугольников  $OPQ$  и  $ORS$ ,

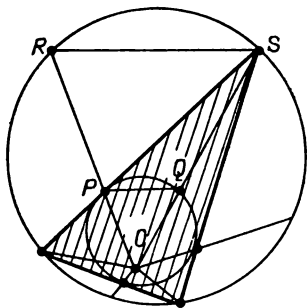


Рис. 106

поэтому достаточно доказать, что  $2S_{OPS} \leq S_{OPQ} + S_{ORS}$ . Так как  $2S_{OPS} = 2S_{OPQ} + 2S_{PQS}$  и  $S_{ORS} = S_{OPQ} + S_{PQS} + S_{PRS}$ , остается доказать, что  $S_{PQS} \leq S_{PRS}$ . Это неравенство очевидно, так как высоты треугольников  $PQS$  и  $PRS$ , опущенные на основания  $PQ$  и  $RS$ , равны, а  $PQ < RS$ .

**9.50.** Достаточно доказать, что оба треугольника содержат центр  $O$  круга. Докажем, что если треугольник  $ABC$ , помещенный в круг радиуса 1, не содержит центра круга, то его площадь меньше 1. В самом деле, для любой точки, лежащей вне треугольника, найдется прямая, проходящая через две вершины и отделяющая эту точку

от третьей вершины. Пусть для определенности прямая  $AB$  разделяет точки  $C$  и  $O$ . Тогда  $h_c < 1$  и  $AB < 2$ , поэтому  $S = h_c \cdot AB/2 < 1$ .

**9.51.** а) Построим на сторонах многоугольника внутренним образом прямоугольники со второй стороной  $R = S/P$ . Они покроют не весь многоугольник (эти прямоугольники перекрываются и могут вылезать за его пределы, а сумма их площадей равна площади многоугольника). Непокрытая точка удалена ото всех сторон многоугольника больше, чем на  $R$ , поэтому круг радиуса  $R$  с центром в этой точке целиком лежит внутри многоугольника.

б) Из задачи а) следует, что во внутренний многоугольник можно поместить круг радиуса  $S_2/P_2$ . Ясно, что этот круг лежит внутри внешнего многоугольника. Остается доказать, что если внутри многоугольника лежит круг радиуса  $R$ , то  $R \leq 2S/P$ . Для этого соединим центр  $O$  круга с вершинами. Тогда многоугольник разобьется на треугольники с площадями  $h_i a_i/2$ , где  $h_i$  — расстояние от точки  $O$  до  $i$ -й стороны, а  $a_i$  — длина  $i$ -й стороны. Так как  $h_i \geq R$ , то  $2S = \sum h_i a_i \geq \sum R a_i = RP$ .

**9.52.** Рассмотрим сначала случай, когда две стороны параллелограмма лежат на прямых  $AB$  и  $AC$ , а четвертая вершина  $X$  лежит на стороне  $BC$ . Если  $BX:XC = x:(1-x)$ , то отношение площади параллелограмма к площади треугольника равно  $2x(1-x) \leq 1/2$ .

В общем случае проведем параллельные прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма (рис. 107). Площадь данного параллелограмма не превосходит суммы площадей заштрихованных параллелограммов, а они относятся к разобранному выше случаю. Если прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма, пересекают лишь две стороны треугольника, то можно ограничиться одним заштрихованным параллелограммом.

**9.53.** Рассмотрим сначала такой случай: две вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  лежат на одной стороне  $PQ$  параллелограмма. Тогда  $AB \leq PQ$  и высота, опущенная на сторону  $AB$ , не больше высоты параллелограмма. Поэтому площадь треугольника  $ABC$  не больше половины площади параллелограмма.

Если же вершины треугольника лежат на разных сторонах параллелограмма, то две из них лежат на противоположных сторонах. Проведем через третью вершину треугольника прямую, параллельную этим сторонам (рис. 108). Она разрезает параллелограмм на два параллелограмма, а треугольник — на два треугольника, причем у обоих треугольников две вершины лежат на сторонах параллелограмма. Приходим к рассмотренному случаю.

**9.54.** Пусть  $M$  — середина наибольшей стороны  $BC$  данного остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность радиуса  $MA$  с центром  $M$  пересекает лучи  $MB$  и  $MC$  в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Так как  $\angle BAC < 90^\circ$ , то  $MB < MB_1$ . Пусть для определенности  $\angle AMB \leq \angle AMC$ , т. е.  $\angle AMB \leq 90^\circ$ . Тогда  $AM^2 +$

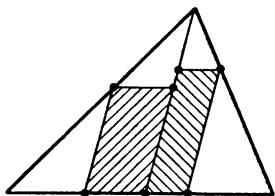


Рис. 107

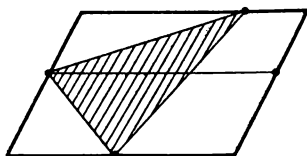


Рис. 108

$+ MB^2 \leq AB^2 \leq BC^2 = 4MB^2$ , т. е.  $AM \leq \sqrt{3} BM$ . Если  $AH$  — высота треугольника  $ABC$ , то  $AH \cdot BC = 2$ , а значит,  $S_{AB_1C_1} = B_1C_1 \times AH/2 = AM \cdot AH \leq \sqrt{3} BM \cdot AH = \sqrt{3}$ .

9.55. а) Пусть  $AB$  — наибольшая диагональ или сторона данного многоугольника  $M$ . Многоугольник  $M$  заключен внутри полосы, образованной перпендикулярами к отрезку  $AB$ , проходящими через точки  $A$  и  $B$ . Проведем к многоугольнику  $M$  две опорные прямые, параллельные  $AB$ ; пусть они пересекают многоугольник  $M$  в точках  $C$  и  $D$ . В результате многоугольник  $M$  заключен в прямоугольник, площадь которого равна  $2S_{ABC} + 2S_{ABD} \leq 2S$ .

б) Пусть  $M$  — исходный многоугольник,  $l$  — произвольная прямая. Рассмотрим многоугольник  $M_1$ , одна из сторон которого — проекция

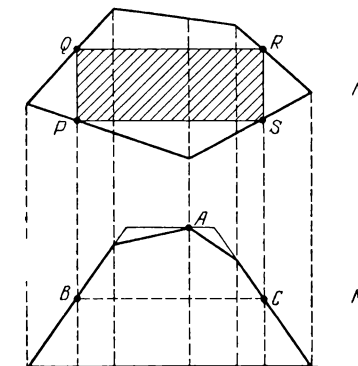


Рис. 109

$M$  на  $l$ , а длины сечений многоугольников  $M$  и  $M_1$  любой прямой, перпендикулярной  $l$ , равны (рис. 109). Легко проверить, что многоугольник  $M_1$  тоже выпуклый, причем его площадь равна  $S$ . Пусть  $A$  — наиболее удаленная от  $l$  точка многоугольника  $M_1$ . Прямая, равноудаленная от точки  $A$  и прямой  $l$ , пересекает стороны многоугольника  $M_1$  в точках  $B$  и  $C$ . Проведем через точки  $B$  и  $C$  опорные прямые. В результате вокруг многоугольника  $M_1$  будет описана трапеция (через точку  $A$  тоже можно провести

опорную прямую); площадь этой трапеции не менее  $S$ . Если высота трапеции (т. е. расстояние от точки  $A$  до прямой  $l$ ) равна  $h$ , то ее площадь равна  $h \cdot BC$ , а значит,  $h \cdot BC \geq S$ . Рассмотрим сечения  $PQ$  и  $RS$  многоугольника  $M$  прямыми, перпендикулярными  $l$  и проходящими через  $B$  и  $C$ . Длины этих сечений равны  $h/2$ , поэтому  $PQRS$  — параллелограмм, причем его площадь равна  $BC \cdot h/2 \geq S/2$ .

9.56. а) Заключим многоугольник в полосу, образованную параллельными прямыми. Будем сдвигать эти прямые параллельно

до тех пор, пока на каждую из них не попадут некоторые вершины  $A$  и  $B$  многоугольника. Затем сделаем то же самое для полосы, образованной прямыми, параллельными  $AB$ . На эти прямые попадут некоторые вершины  $C$  и  $D$  (рис. 110). Исходный многоугольник заключен в параллелограмм, поэтому площадь этого параллелограмма не меньше 1. С другой стороны, сумма площадей треугольников  $ACB$  и  $ADB$  равна половине площади параллелограмма, поэтому площадь одного из этих треугольников не меньше  $1/4$ .

б) Как и в задаче а), заключим многоугольник в полосу, образованную параллельными прямыми, так, чтобы вершины  $A$  и  $B$  лежали на этих прямых. Пусть ширина этой полосы равна  $d$ . Проведем три прямые, делящие эту полосу на равные полосы шириной  $d/4$ . Пусть первая и третья прямые пересекают стороны многоугольника в точках  $K, L$  и  $M, N$  соответственно (рис. 111).

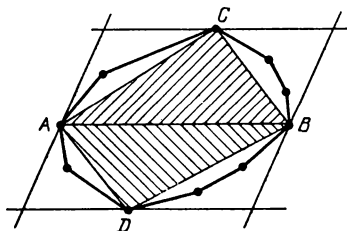


Рис. 110

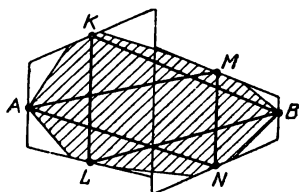


Рис. 111

Продолжим стороны, на которых лежат точки  $K, L, M$  и  $N$ , до пересечения со сторонами исходной полосы и с прямой, делящей ее пополам. При этом образуются две трапеции со средними линиями  $KL$  и  $MN$ , высоты которых равны  $d/2$ . Так как эти трапеции покрывают весь многоугольник, сумма их площадей не меньше его площади, т. е.  $(d \cdot KL + d \cdot MN)/2 \geq 1$ . Сумма площадей треугольников  $AMN$  и  $BKL$ , содержащихся в исходном многоугольнике, равна  $(3d \cdot MN + 3d \cdot KL)/8 \geq 3/4$ . Поэтому площадь одного из этих треугольников не меньше  $3/8$ .

**9.57.** Докажем, что найдутся даже три последовательные вершины, удовлетворяющие требуемому условию. Пусть  $\alpha_i$  — угол между  $i$ -й и  $(i+1)$ -й сторонами,  $\beta_i = \pi - \alpha_i$ , а  $a_i$  — длина  $i$ -й стороны.

а) Площадь треугольника, образованного  $i$ -й и  $(i+1)$ -й сторонами, равна  $S_i = (a_i a_{i+1} \sin \alpha_i)/2$ . Пусть  $S$  — наименьшая из этих площадей. Тогда  $2S \leq a_i a_{i+1} \sin \alpha_i$ , поэтому  $(2S)^n \leq (a_1^2 \dots a_n^2) (\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n) \leq a_1^2 \dots a_n^2$ . Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим  $(a_1 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + \dots + a_n)/n$ , поэтому  $2S \leq (a_1 \dots a_n)^{2/n} \leq (a_1 + \dots + a_n)^2/n^2$ . Так как  $a_i \leq p_i + q_i$ , где  $p_i$  и  $q_i$  — проекции  $i$ -й стороны на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата, то

$a_1 + \dots + a_n \leq (p_1 + \dots + p_n) + (q_1 + \dots + q_n) \leq 4$ . Поэтому  $2S \leq 16n^2$ , т. е.  $S \leq 8/n^2$ .

б) Воспользуемся доказанным выше неравенством

$$2S \leq (a_1 \dots a_n)^{2/n} (\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n)^{1/n} \leq \frac{16}{n^2} (\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n).$$

Так как  $\sin \alpha_i = \sin \beta_i$  и  $\beta_1 + \dots + \beta_n = 2\pi$ , то  $(\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n)^{1/n} = (\sin \beta_1 \dots \sin \beta_n)^{1/n} \leq (\beta_1 + \dots + \beta_n)/n = 2\pi/n$ . Поэтому  $2S \leq 32\pi/n^3$ , т. е.  $S \leq 16\pi/n^3$ .

**9.58.** Пусть  $l_i$  — длина  $i$ -го звена ломаной,  $a_i$  и  $b_i$  — длины его проекций на стороны квадрата. Тогда  $l_i \leq a_i + b_i$ . Следовательно,  $1000 = l_1 + \dots + l_n \leq (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)$ , т. е. либо  $a_1 + \dots + a_n \geq 500$ , либо  $b_1 + \dots + b_n \geq 500$ . Если сумма длин проекций звеньев на сторону длиной 1 не меньше 500, то на одну из точек стороны проектируется не менее 500 различных звеньев ломаной, т. е. перпендикуляр к стороне, проходящий через эту точку, пересекает ломаную по крайней мере в 500 точках.

**9.59.** Геометрическое место точек, удаленных от данного отрезка

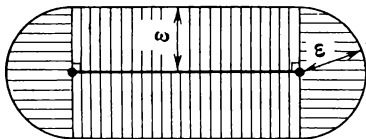


Рис. 112

не более чем на  $\epsilon$ , изображено на рис. 112. Площадь этой фигуры равна  $\pi\epsilon^2 + 2\epsilon l$ , где  $l$  — длина отрезка. Построим такие фигуры для всех  $N$  звеньев данной ломаной. Так как соседние фигуры имеют  $N-1$  общих кругов радиуса  $\epsilon$  с центрами

в неконцевых вершинах ломаной, то покрытая этими фигурами площадь не превосходит  $N\pi\epsilon^2 + 2\epsilon(l_1 + \dots + l_n) - (N-1)\pi\epsilon^2 = 2\epsilon L + \pi\epsilon^2$ . Эти фигуры покрывают весь квадрат, так как любая точка квадрата удалена от некоторой точки ломаной меньше чем на  $\epsilon$ . Поэтому

$$1 \leq 2\epsilon L + \pi\epsilon^2, \text{ т. е. } L \geq \frac{1}{2\epsilon} - \frac{\pi\epsilon}{2}.$$

**9.60.** Разобьем квадрат на  $n$  вертикальных полосок, содержащих по  $n$  точек каждая. Точки внутри каждой полосы соединим сверху вниз и получим  $n$  ломаных. Эти ломаные можно соединить в одну ломаную двумя способами (рис. 113, а и б). Рассмотрим отрезки, соединяющие разные полосы. Объединение всех таких отрезков, полученных обоими способами, представляет собой пару ломаных, причем сумма длин горизонтальных проекций звеньев каждой из них не превосходит 1. Поэтому сумма длин горизонтальных проекций соединяющих отрезков для одного из способов не превосходит 1. Рассмотрим именно это соединение. Сумма длин горизонтальных проекций для соединяющих звеньев не превосходит 1, а для всех остальных звеньев не превосходит  $(n-1)(h_1 + \dots + h_n)$ , где  $h_i$  — ширина  $i$ -й полосы. Ясно, что  $h_1 + \dots + h_n = 1$ . Сумма вертикальных проекций всех звеньев ломаной не превосходит  $n$ . В итоге получаем, что

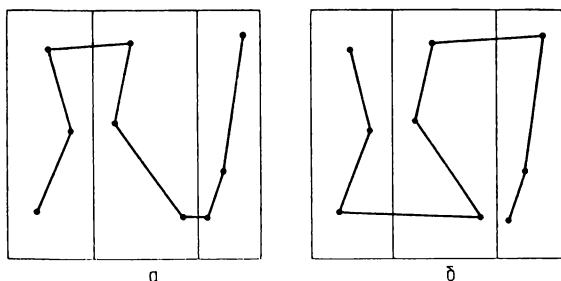


Рис. 113

сумма вертикальных и горизонтальных проекций всех звеньев не превосходит  $1 + (n-1) + n = 2n$ , поэтому и длина ломаной не превосходит  $2n$ .

**9.61.** Пусть  $M$  и  $N$  — концы ломаной. Будем идти по ломаной из  $M$  в  $N$ . Пусть  $A_1$  — первая из встретившихся нам точек ломаной, удаленных от какой-либо вершины квадрата на расстояние 0,5. Рассмотрим вершины квадрата, соседние с этой вершиной. Пусть  $B_1$  — первая после  $A_1$  точка ломаной, удаленная от одной из этих вершин на расстояние 0,5. Вершины квадрата, ближайшие к точкам  $A_1$  и  $B_1$ , обозначим  $A$  и  $B$  соответственно (рис. 114). Часть ломаной от  $M$  до  $A_1$  обозначим через  $L_1$ , от  $A_1$  до  $N$  — через  $L_2$ . Пусть  $X$  и  $Y$  — множества точек, лежащих на  $AD$  и удаленных не более чем на 0,5 от  $L_1$  и  $L_2$  соответственно. По условию  $X$  и  $Y$  покрывают всю сторону  $AD$ . Ясно, что  $A$  принадлежит  $X$ , а  $D$  не принадлежит  $X$ , поэтому  $D$  принадлежит  $Y$ , т. е. оба множества  $X$  и  $Y$  не пусты. Но каждое из них состоит из нескольких отрезков, поэтому они должны иметь общую точку  $P$ . Следовательно, на  $L_1$  и  $L_2$  существуют точки  $F_1$  и  $F_2$ , для которых  $PF_1 \leq 0,5$  и  $PF_2 \leq 0,5$ .

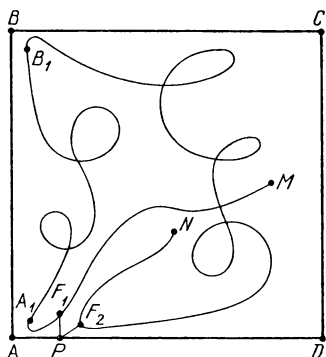


Рис. 114

Докажем, что  $F_1$  и  $F_2$  — искомые точки. В самом деле,

$F_1 F_2 \leq F_1 P + P F_2 \leq 1$ . С другой стороны, идя в  $F_2$  из  $F_1$ , мы должны пройти через точку  $B$ , а  $F_1 B_1 \geq 99$  и  $F_2 B_1 \geq 99$ , так как точка  $B_1$  удалена от стороны  $BC$  не больше чем на 0,5, а  $F_1$  и  $F_2$  удалены от стороны  $AD$  не больше чем на 0,5.

**9.62.** Пусть  $\angle A = \angle B$ . Достаточно доказать, что если  $AD < BC$ , то  $\angle D > \angle C$ . Возьмем на стороне  $BC$  точку  $D_1$  так, что  $BD_1 = AD$ . Тогда  $ABD_1D$  — равнобедренная трапеция. Поэтому  $\angle D > \angle D_1 DA = \angle DD_1 B > \angle C$ .

9.63. Пусть  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точек  $B$  и  $C$  на основание  $AD$ . Так как  $\angle BAB_1 < \angle CDC_1$  и  $BB_1 = CC_1$ , то  $AB_1 > DC_1$  и поэтому  $B_1D < AC_1$ . Следовательно,  $BD^2 = B_1D^2 + B_1B^2 < AC_1^2 + CC_1^2 = AC^2$ .

9.64. Пусть углы  $B$  и  $D$  четырехугольника  $ABCD$  тупые. Тогда точки  $B$  и  $D$  лежат внутри окружности с диаметром  $AC$ . Так как расстояние между любыми двумя точками, лежащими внутри окружности, меньше ее диаметра, то  $BD < AC$ .

9.65. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  равны. Поэтому  $BM + (AM + CM) \geq BM + AC = BM + BD \geq DM$ .

9.66. Пусть  $O$  — середина отрезка  $BD$ . Точка  $A$  лежит внутри окружности с диаметром  $BD$ , поэтому  $OA < BD/2$ . Кроме того,  $FO = CD/2$ . Следовательно,  $2FA \leq 2FO + 2OA < CD + BD$ .

9.67. Отложим на лучах  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  отрезки  $AB'$ ,  $AC'$  и  $AD'$  длиной  $1/AB$ ,  $1/AC$  и  $1/AD$ . Тогда  $AB:AC = AC':AB'$ , т. е.  $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$ . Коэффициент подобия этих треугольников равен  $1/(AB \cdot AC)$ , поэтому  $B'C' = BC/(AB \cdot AC)$ . Аналогично  $C'D' = CD/(AC \cdot AD)$  и  $B'D' = BD/(AB \cdot AD)$ . Подставив эти выражения в неравенство  $B'D' \leq B'C' + C'D'$  и домножив обе части на  $AB \cdot AC \cdot AD$ , получим требуемое.

9.68. Ясно, что  $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2S_{AMC} + 2S_{ANC} = 2(S_{AMN} + S_{CMN})$ . Если отрезок  $AM$  пересекает диагональ  $BD$  в точке  $A_1$ , то  $S_{CMN} = S_{A_1MN} < S_{AMN}$ . Значит,  $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$ .

9.69. Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Пусть для определенности точка  $P$  лежит внутри треугольника  $AOB$ . Тогда  $AP + BP \leq AO + BO < AC + BD$  (см. решение задачи 9.28) и  $CP + DP < CB + BA + AD$ .

9.70. Пусть  $r_i$ ,  $S_i$  и  $p_i$  — радиусы вписанных окружностей, площади и полупериметры полученных треугольников. Тогда  $Q \geq 2 \sum r_i = 2 \sum (S_i/p_i) > 4 \sum (S_i/P) = 4S/P$ .

9.71. Пусть  $AC \leq BD$ . Опустим из вершин  $A$  и  $C$  перпендикуляры  $AA_1$  и  $CC_1$  на диагональ  $BD$ . Тогда  $AA_1 + CC_1 \leq AC \leq BD$ , а значит,  $AA_1 \leq BD/2$  или  $CC_1 \leq BD/2$ .

9.72. Проведем через концы отрезка  $KL$  прямые, ему перпендикулярные, и рассмотрим проекции на них вершин четырехугольника, а также точки пересечения с ними прямых  $AC$  и  $BD$  (рис. 115). Пусть для определенности точка  $A$  лежит внутри полосы, заданной этими прямыми, а точка  $B$  — вне ее. Тогда можно считать, что  $D$  лежит внутри полосы, так как иначе  $BD > KL$ , и доказательство завершено. Так как

$$\frac{AA'}{BB'} \leq \frac{A_1K}{B_1K} = \frac{C_1L}{D_1L} \leq \frac{CC'}{DD'},$$

то либо  $AA' \leq CC'$  (и тогда  $AC > KL$ ), либо  $BB' \geq DD'$  (и тогда  $BD > KL$ ).

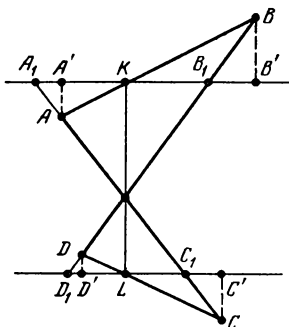


Рис. 115

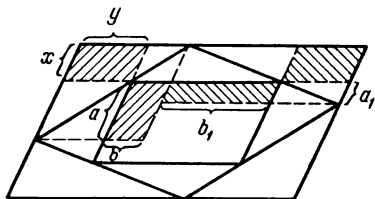


Рис. 116

**9.73.** Введем такие обозначения, как на рис. 116. Все рассматриваемые параллелограммы имеют общий центр (задача 1.7). Длины сторон параллелограмма  $P_3$  равны  $a + a_1$  и  $b + b_1$ , а длины сторон параллелограмма  $P_1$  равны  $a + a_1 + 2x$  и  $b + b_1 + 2y$ , поэтому нужно проверить, что  $a + a_1 + 2x \leq 2(a + a_1)$  или  $b + b_1 + 2y \leq 2(b + b_1)$ , т. е.  $2x \leq a + a_1$  или  $2y \leq b + b_1$ . Предположим, что  $a + a_1 < 2x$  и  $b + b_1 < 2y$ . Тогда  $\sqrt{aa_1} \leq (a + a_1)/2 < x$  и  $\sqrt{bb_1} < y$ . С другой стороны, равенство площадей заштрихованных параллелограммов (см. задачу 4.19) показывает, что  $ab = xy = a_1b_1$ , а значит,  $\sqrt{aa_1}\sqrt{bb_1} = xy$ . Получено противоречие.

**9.74.** Пусть углы пятиугольника равны  $\alpha, \alpha + \gamma, \alpha + 2\gamma, \alpha + 3\gamma, \alpha + 4\gamma$ , где  $\alpha, \gamma \geq 0$ . Так как сумма углов пятиугольника равна  $3\pi$ , то  $5\alpha + 10\gamma = 3\pi$ . Из выпуклости пятиугольника следует, что все его углы меньше  $\pi$ , т. е.  $\alpha + 4\gamma < \pi$ , или  $-5\alpha/2 - 10\gamma > -5\pi/2$ . Складывая последнее неравенство с равенством  $5\alpha + 10\gamma = 3\pi$ , получаем  $5\alpha/2 > \pi/2$ , т. е.  $\alpha > \pi/5 = 36^\circ$ .

**9.75.** Ясно, что  $4 = AE^2 = |\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}|^2 = |\vec{AB} + \vec{BC}|^2 + 2(\vec{AB} + \vec{BC}, \vec{CD} + \vec{DE}) + |\vec{CD} + \vec{DE}|^2$ . Так как  $\angle ACE = 90^\circ$ , то  $(\vec{AB} + \vec{BC}, \vec{CD} + \vec{DE}) = (\vec{AC}, \vec{CE}) = 0$ . Поэтому  $4 = |\vec{AB} + \vec{BC}|^2 + |\vec{CD} + \vec{DE}|^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + 2(\vec{AB}, \vec{BC}) + 2(\vec{CD}, \vec{DE})$ , т. е. достаточно доказать, что  $abc < 2(\vec{AB}, \vec{BC})$  и  $bcd < 2(\vec{CD}, \vec{DE})$ . Поскольку  $2(\vec{AB}, \vec{BC}) = 2ab \cos(180^\circ - \angle ABC) = 2ab \cos AEC = ab \cdot CE$  и  $c < CE$ , то  $abc < 2(\vec{AB}, \vec{BC})$ . Второе неравенство доказывается аналогично, так как можно ввести новые обозначения  $A_1 = E, B_1 = D, C_1 = C, a_1 = d, b_1 = c, c_1 = b$ , и неравенство  $bcd < 2(\vec{CD}, \vec{DE})$  перепишется в виде  $a_1b_1c_1 < 2(\vec{A_1B_1}, \vec{B_1C_1})$ .

**9.76.** Пусть  $B$  — середина стороны  $A_1A_2$  данного шестиугольника  $A_1 \dots A_6$ ,  $O$  — его центр. Можно считать, что точка  $P$  лежит внутри



треугольника  $A_1OB$ . Тогда  $PA_3 \geq 1$ , так как расстояние от точки  $A_3$  до прямой  $BO$  равно 1;  $PA_4 \geq 1$  и  $PA_5 \geq 1$ , так как расстояния от точек  $A_4$  и  $A_5$  до прямой  $A_3A_6$  равны 1.

9.77. Предположим, что радиусы описанных окружностей треугольников  $ACE$  и  $BDF$  больше 1. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ACE$ . Тогда  $\angle ABC > \angle AOC$ ,  $\angle CDE > \angle COE$  и  $\angle EFA > \angle EOA$ , а значит,  $\angle B + \angle D + \angle F > 2\pi$ . Аналогично  $\angle A + \angle C + \angle E > 2\pi$ , т. е. сумма углов шестиугольника  $ABCDEF$  больше  $4\pi$ . Получено противоречие.

Замечание. Аналогично можно доказать, что радиус описанной окружности одного из треугольников  $ACE$  и  $BDF$  не меньше 1.

9.78. Можно считать, что  $AE \leq AC \leq CE$ . Согласно задаче 9.67  $AD \cdot CE \leq AE \cdot CD + AC \cdot DE < AE + AC \leq 2CE$ , т. е.  $AD < 2$ .

9.79. Так как  $\angle A_1 = 180^\circ - \angle A_2A_7/2$ ,  $\angle A_3 = 180^\circ - \angle A_4A_2/2$  и  $\angle A_5 = 180^\circ - \angle A_6A_4/2$ , то  $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 = 2 \cdot 180^\circ + (360^\circ - \angle A_2A_7 - \angle A_4A_2 - \angle A_6A_4)/2 = 2 \cdot 180^\circ + \angle A_7A_6/2$ . Поскольку центр окружности лежит внутри семиугольника, то  $\angle A_7A_6 < 180^\circ$ , поэтому  $\angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5 < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$ .

9.80. а) Нужно доказать, что если  $c$  — гипотенуза прямоугольного треугольника, а  $a$  и  $b$  — его катеты, то  $c \geq (a+b)/\sqrt{2}$ , т. е.  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ . Ясно, что  $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \leq (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)$ .

б) Пусть  $d_i$  — длина  $i$ -й стороны многоугольника, а  $x_i$  и  $y_i$  — длины ее проекций на координатные оси. Тогда  $x_1 + \dots + x_n \geq 2a$ ,  $y_1 + \dots + y_n \geq 2b$ . Согласно задаче а)  $d_i \geq (x_i + y_i)/\sqrt{2}$ . Поэтому  $d_1 + \dots + d_n \geq (x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n)/\sqrt{2} \geq \sqrt{2}(a+b)$ .

9.81. Возьмем отрезок длиной  $P$  и расположим на нем стороны многоугольника следующим образом: на одном конце отрезка поместим наибольшую сторону, на другом — следующую за ней по величине, а все остальные стороны поместим между ними. Так как любая сторона многоугольника меньше  $P/2$ , середина  $O$  отрезка не может находиться на этих двух наибольших сторонах. Длина стороны, на которой находится точка  $O$ , не превосходит  $P/3$  (иначе первые две стороны тоже были бы больше  $P/3$  и сумма трех сторон была бы больше  $P$ ), поэтому одна из ее вершин удалена от  $O$  не более чем на  $P/6$ . Эта вершина разбивает отрезок на два искоемых отрезка, так как разность их длин не превосходит  $2 \cdot P/6 = P/3$ .

9.82. Пусть  $\beta_k = \angle OA_k A_{k+1}$ . Тогда  $x_k \sin \beta_k = d_k = x_{k+1} \sin(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})$ . Поэтому  $2 \sum d_k = \sum x_k (\sin(\alpha_k - \beta_k) + \sin \beta_k) = 2 \sum x_k \sin(\alpha_k/2) \cos(\alpha_k/2 - \beta_k) \leq 2 \sum x_k \sin(\alpha_k/2)$ .

Ясно также, что  $A_k A_{k+1} = x_k \cos \beta_k + x_{k+1} \cos(\alpha_{k+1} - \beta_{k+1})$ . Поэтому  $2p = \sum A_k A_{k+1} = \sum x_k (\cos(\alpha_k - \beta_k) + \cos \beta_k) = 2 \sum x_k \cos(\alpha_k/2) \cos(\alpha_k/2 - \beta_k) \leq 2 \sum x_k \cos(\alpha_k/2)$ .

В обоих случаях равенство достигается, только если  $\alpha_k = 2\beta_k$ , т. е.  $O$  — центр вписанной окружности.

**9.83.** Предположим, что центр  $O$  многоугольника  $M_2$  лежит вне многоугольника  $M_1$ . Тогда существует такая сторона  $AB$  многоугольника  $M_1$ , что многоугольник  $M_1$  и точка  $O$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ . Пусть  $CD$  — сторона многоугольника  $M_1$ , параллельная  $AB$ . Расстояние между прямыми  $AB$  и  $CD$  равно радиусу вписанной окружности  $S$  многоугольника  $M_2$ , поэтому прямая  $CD$  лежит вне окружности  $S$ . С другой стороны, отрезок  $CD$  лежит внутри многоугольника  $M_2$ . Следовательно, длина отрезка  $CD$  меньше половины длины стороны многоугольника  $M_2$  (см. задачу 10.66). Получено противоречие.

**9.84.** Пусть  $A_1$  — ближайшая к  $O$  вершина многоугольника. Разобьем многоугольник на треугольники диагоналями, проходящими через вершину  $A_1$ . Точка  $O$  окажется в одном из этих треугольников, например в треугольнике  $A_1A_kA_{k+1}$ . Если точка  $O$  попадет на сторону  $A_1A_k$ , то  $\angle A_1OA_k = \pi$ , и задача решена. Поэтому будем считать, что точка  $O$  лежит строго внутри треугольника  $A_1A_kA_{k+1}$ . Так как  $A_1O \leq A_kO$  и  $A_1O \leq A_{k+1}O$ , то  $\angle A_1A_kO \leq \angle A_kA_1O$  и  $\angle A_1A_{k+1}O \leq \angle A_{k+1}A_1O$ . Следовательно  $\angle A_kOA_1 + \angle A_{k+1}OA_1 = (\pi - \angle OA_1A_k - \angle OA_kA_1) + (\pi - \angle OA_1A_{k+1} - \angle OA_{k+1}A_1) \geq \geq 2\pi - 2\angle OA_1A_k - 2\angle OA_1A_{k+1} = 2\pi - 2\angle A_kA_1A_{k+1} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}$ , т. е. один

из углов  $A_kOA_1$  и  $A_{k+1}OA_1$  не меньше  $\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ .

**9.85.** Пусть  $d$  — длина наибольшей диагонали (или стороны)  $AB$  данного  $n$ -угольника. Тогда его периметр  $P$  не превосходит  $\pi d$  (задача 13.42). Пусть  $A'_i$  — проекция вершины  $A_i$  на отрезок  $AB$ . Тогда  $\sum AA'_i \geq nd/2$  или  $\sum BA'_i \geq nd/2$  (задача 9.87); пусть для определенности выполняется первое неравенство. Тогда  $\sum AA_i > \sum AA'_i \geq \geq nd/2 > \pi d \geq P$ , так как  $n/2 \geq 3,5 > \pi$ . Любая точка  $n$ -угольника, достаточно близкая к вершине  $A$ , обладает требуемым свойством.

**9.86.** а) Предположим сначала, что  $\angle A_i > \angle B_i$ , а для всех остальных рассматриваемых пар углов имеет место равенство. Расположим многоугольники так, чтобы вершины  $A_1, \dots, A_i$  совпали с  $B_1, \dots, B_i$ . В треугольниках  $A_1A_iA_n$  и  $A_1A_iB_n$  стороны  $A_iA_n$  и  $A_iB_n$  равны и  $\angle A_1A_iA_n > \angle A_1A_iB_n$ , поэтому  $A_1A_n > A_1B_n$ .

Если же не равны несколько углов, то многоугольники  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$  можно включить в цепочку многоугольников, последовательные члены которой такие, как в разобранный выше случае.

б) При полном обходе многоугольника знак минус меняется на знак плюс столько же раз, сколько происходит обратная смена знака. Поэтому число пар соседних вершин с разными знаками четно. Остается проверить, что число изменений знака не может

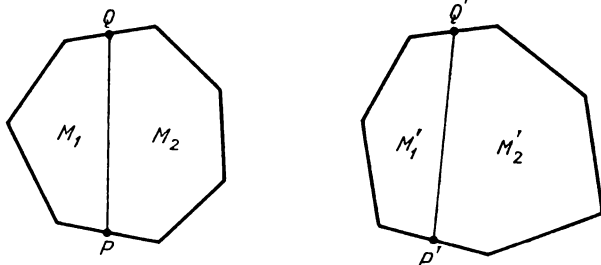


Рис. 117

быть равно двум (число изменений знака не равно нулю, так как сумма углов обоих многоугольников одна и та же).

Предположим, что число изменений знака равно двум. Пусть  $P$  и  $Q$ ,  $P'$  и  $Q'$  — середины сторон многоугольников  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$ , на которых происходит смена знака. К парам многоугольников  $M_1$  и  $M'_1$ ,  $M_2$  и  $M'_2$  (рис. 117) можно применить утверждение задачи а); в одном случае получим  $PQ > P'Q'$ , а в другом  $PQ < P'Q'$ , чего не может быть.

**9.87.** Пусть  $A$  и  $B$  — концы отрезка;  $X_1, \dots, X_n$  — данные точки. Так как  $AX_i + BX_i = 1$ , то  $\sum AX_i + \sum BX_i = n$ . Следовательно,  $\sum AX_i \geq n/2$  или  $\sum BX_i \geq n/2$ .

**9.88.** Будем тянуть провод по отрезку  $AB$ , огибая при этом встречающиеся деревья по кратчайшей дуге (рис. 118). Достаточно

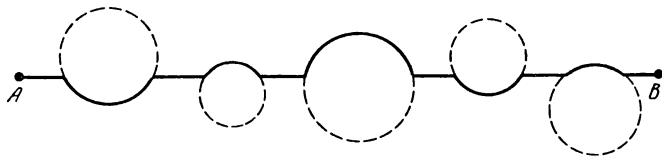


Рис. 118

доказать, что путь по дуге окружности не более чем в 1,6 раза длиннее пути по прямой. Отношение длины дуги угловой величины  $2\phi$  к хорде, ее стягивающей, равно  $\phi/\sin \phi$ . Так как  $0 < \phi \leq \pi/2$ , то  $\phi/\sin \phi \leq \pi/2 < 1,6$ .

**9.89.** Пусть деревья высотой  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$  растут в точках  $A_1, \dots, A_n$ . Тогда по условию  $A_1 A_2 \leq |a_1 - a_2| = a_1 - a_2, \dots, A_{n-1} A_n \leq a_{n-1} - a_n$ . Следовательно, длина ломаной  $A_1 A_2 \dots A_n$  не превосходит  $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n < 100$  м. Эту ломаную можно огородить забором, длина которого не превосходит 200 м (рис. 119).

**9.90.** Выделим в полученном многоугольнике части, по которым произошла склейка (на рис. 120 эти части заштрихованы). Все

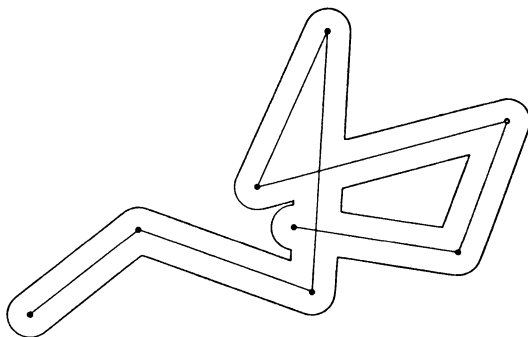


Рис. 119

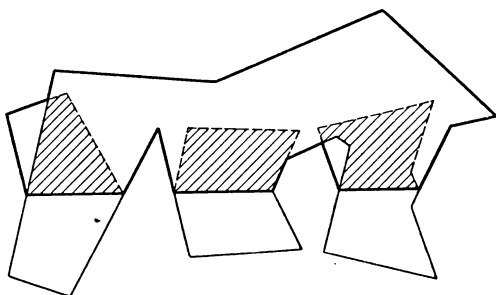


Рис. 120

стороны, не принадлежащие заштрихованным многоугольникам, входят в периметр исходного и полученного многоугольников. Что же касается заштрихованных многоугольников, то их стороны, лежащие на прямой сгиба, входят в периметр полученного многоугольника, а все остальные стороны — в периметр исходного многоугольника. Так как у любого многоугольника сумма его сторон, лежащих на некоторой прямой, меньше суммы остальных сторон, то периметр исходного многоугольника всегда больше, чем периметр полученного.

**9.91.** Возьмем на ломаной две точки  $A$  и  $B$ , делящие ее периметр пополам. Тогда  $AB \leq 1/2$ . Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса  $1/4$  с центром в середине  $O$  отрезка  $AB$ . Пусть  $M$  — произвольная точка ломаной, а точка  $M_1$  симметрична ей относительно точки  $O$ . Тогда  $MO = M_1M/2 \leq (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \leq 1/4$ , так как  $BM + AM$  не превосходит половины длины ломаной.

**9.92.** Пусть остроугольный треугольник  $ABC$  расположен внутри окружности  $S$ . Построим описанную окружность  $S_1$  треугольника  $ABC$ . Так как треугольник  $ABC$  остроугольный, то угловая величина

дуги окружности  $S_1$ , лежащей внутри  $S$ , больше  $180^\circ$ . Поэтому на этой дуге можно выбрать диаметрально противоположные точки, т. е. внутри окружности  $S$  содержится диаметр окружности  $S_1$ . Следовательно, радиус окружности  $S$  не меньше радиуса окружности  $S_1$ .

Аналогичное утверждение для тупоугольного треугольника не верно. Тупоугольный треугольник лежит внутри окружности, построенной на наибольшей стороне  $a$  как на диаметре. Радиус этой окружности равен  $a/2$ , а радиус описанной окружности треугольника равен  $a/(2 \sin \alpha)$ . Ясно, что  $a/2 < a/(2 \sin \alpha)$ .

**9.93.** Первое решение. Любой треугольник периметра  $P$  можно поместить в круг радиуса  $P/4$ , а если остроугольный треугольник помещен в круг радиуса  $R_1$ , то  $R_1 \geq R$  (задача 9.92). Поэтому  $P/4 = R_1 \geq R$ .

Второе решение. Если  $0 < x < \pi/2$ , то  $\sin x > 2x/\pi$ . Поэтому  $a + b + c = 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) > 2R(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)/\pi = 4R$ .

## НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

---

Эта глава тесно связана с предыдущей. Основные сведения см. в предыдущей главе.

### § 1. Медианы

**10.1.** Докажите, что если  $a > b$ , то  $m_a < m_b$ .

**10.2.** Медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что если четырехугольник  $A_1MB_1C$  описанный, то  $AC = BC$ .

**10.3.** Периметры треугольников  $ABM$ ,  $BCM$  и  $ACM$ , где  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  правильный.

**10.4.** а) Докажите, что если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — длины сторон произвольного треугольника, то  $a^2 + b^2 \geq c^2/2$ .

б) Докажите, что  $m_a^2 + m_b^2 \geq 9c^2/8$ .

**10.5.** а) Докажите, что  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 27R^2/4$ .

б) Докажите, что  $m_a + m_b + m_c \leq 9R/2$ .

**10.6.** Докажите, что  $|a^2 - b^2|/(2c) < m_c \leq (a^2 + b^2)/(2c)$ .

**10.7.** Пусть  $x = ab + bc + ca$ ,  $x_1 = m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a$ . Докажите, что  $9/20 < x_1/x < 5/4$ .

См. также задачи 9.1, 10.74, 10.76, 17.17.

### § 2. Высоты

**10.8.** Докажите, что в любом треугольнике сумма длин высот меньше периметра.

**10.9.** Две высоты треугольника больше 1. Докажите, что его площадь больше  $1/2$ .

**10.10.** В треугольнике  $ABC$  высота  $AM$  не меньше  $BC$ , а высота  $BH$  не меньше  $AC$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

**10.11.** Докажите, что  $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} < \frac{1}{r}$ .

**10.12.** Докажите, что  $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ .

**10.13.** Пусть  $a < b$ . Докажите, что  $a + h_a \leq b + h_b$ .

**10.14.** Докажите, что  $h_a \leq \sqrt{r_b r_c}$ .

**10.15.** Докажите, что  $h_a \leq (a/2) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ .

**10.16.** Пусть  $a \leq b \leq c$ . Докажите, что тогда  $h_a + h_b + h_c \leq 3b(a^2 + ac + c^2)/(4pR)$ .

См. также задачи 10.28, 10.55, 10.74, 10.79.

### § 3. Биссектрисы

10.17. Докажите, что  $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ .

10.18. Докажите, что  $h_a/l_a \geq \sqrt{2r/R}$ .

10.19. Докажите, что: а)  $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2$ ; б)  $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p$ .

10.20. Докажите, что  $l_a + l_b + m_c \leq \sqrt{3}p$ .

См. также задачи 6.38, 10.75, 10.94.

### § 4. Длины сторон

10.21. Докажите, что  $\frac{9r}{2S} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9R}{4S}$ .

10.22. Докажите, что  $2bc \cos \alpha / (b+c) < b+c-a < 2bc/a$ .

10.23. Докажите, что если  $a, b, c$  — длины сторон треугольника периметра 2, то  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(1-abc)$ .

10.24. Докажите, что  $20Rr - 4r^2 \leq ab + bc + ca \leq 4(R+r)^2$ .

### § 5. Радиусы описанной, вписанной и внеписанных окружностей

10.25. Докажите, что  $rr_c \leq c^2/4$ .

10.26. Докажите, что  $r/R \leq 2 \sin(\alpha/2)(1 - \sin(\alpha/2))$ .

10.27. Докажите, что  $6r \leq a+b$ .

10.28. Докажите, что  $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3$ .

10.29. Докажите, что  $27Rr \leq 2p^2 \leq 27R^2/2$ .

10.30. Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , причем  $OA \geq OB \geq OC$ . Докажите, что  $OA \geq 2r$  и  $OB \geq r\sqrt{2}$ .

10.31. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин не меньше  $6r$ .

10.32. Докажите, что  $3\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right) \geq 4\left(\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c}\right)$ .

10.33. Докажите, что:

а)  $5R - r \geq \sqrt{3}p$ ;

б)  $4R - r_a \geq (p-a)[\sqrt{3} + (a^2 + (b-c)^2)/(2S)]$ .

10.34. Докажите, что  $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ .

10.35. Докажите, что  $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 27R^2/4$ .

См. также задачи 10.11, 10.12, 10.14, 10.18, 10.24, 10.55, 10.79, 10.82, 19.7.

### § 6. Симметричные неравенства для углов треугольника

Пусть  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника  $ABC$ . В задачах этого параграфа требуется доказать указанные в условии неравенства.

Замечание. Если  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — углы некоторого треугольника, то существует треугольник с углами  $(\pi-\alpha)/2$ ,  $(\pi-\beta)/2$  и  $(\pi-\gamma)/2$ .

В самом деле, эти числа положительны и их сумма равна  $\pi$ . Следовательно, если некоторое симметричное неравенство справедливо для синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов любого треугольника, то справедливо и аналогичное неравенство, в котором  $\sin x$  заменен на  $\cos(x/2)$ ,  $\cos x$  — на  $\sin(x/2)$ ,  $\operatorname{tg} x$  — на  $\operatorname{ctg}(x/2)$  и  $\operatorname{ctg} x$  — на  $\operatorname{tg}(x/2)$ . Обратный переход от неравенств с половинными углами к неравенствам с целыми углами возможен лишь для остроугольных треугольников. В самом деле, если  $\alpha' = (\pi - \alpha)/2$ , то  $\alpha = \pi - 2\alpha'$ . Поэтому для остроугольного треугольника с углами  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  существует треугольник с углами  $\pi - 2\alpha'$ ,  $\pi - 2\beta'$  и  $\pi - 2\gamma'$ . При такой замене  $\sin(x/2)$  переходит в  $\cos x$  и т. д., но полученное неравенство может оказаться справедливым лишь для остроугольных треугольников.

**10.36.** а)  $1 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$ ;

б)  $1 < \sin(\alpha/2) + \sin(\beta/2) + \sin(\gamma/2) \leq 3/2$ .

**10.37.** а)  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/2$ ;

б)  $\cos(\alpha/2) + \cos(\beta/2) + \cos(\gamma/2) \leq 3\sqrt{3}/2$ .

**10.38.** а)  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$ ;

б)  $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2) \geq \sqrt{3}$ .

**10.39.** а)  $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) \geq 3\sqrt{3}$ .

б) Для остроугольного треугольника

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}.$$

**10.40.** а)  $\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) \leq 1/8$ ;

б)  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1/8$ .

**10.41.** а)  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq 3\sqrt{3}/8$ ;

б)  $\cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) \leq 3\sqrt{3}/8$ .

**10.42.** а)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq 3/4$ .

б) Для тупоугольного треугольника

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma > 1.$$

**10.43.**  $\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha \leq 3/4$ .

**10.44.** Для остроугольного треугольника

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha).$$

## § 7. Неравенства для углов треугольника

**10.45.** Докажите, что  $1 - \sin(\alpha/2) \geq 2 \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2)$ .

**10.46.** Докажите, что  $\sin(\gamma/2) \leq c/(a+b)$ .

**10.47.** Докажите, что если  $a+b < 3c$ , то  $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) < 1/2$ .

**10.48.** Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы остроугольного треугольника. Докажите, что если  $\alpha < \beta < \gamma$ , то  $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$ .

**10.49.** Докажите, что  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma \leq 3/2$ .

**10.50.** На медиане  $BM$  треугольника  $ABC$  взята точка  $X$ . Докажите, что если  $AB < BC$ , то  $\angle XAB > \angle XCB$ .



**10.51.** Вписанная окружность касается сторон треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  остроугольный.

**10.52.** Из медиан треугольника с углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  составлен треугольник с углами  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  и  $\gamma_m$  (угол  $\alpha_m$  лежит против медианы  $AA_1$  и т. д.). Докажите, что если  $\alpha > \beta > \gamma$ , то  $\alpha > \alpha_m$ ,  $\alpha > \beta_m$ ,  $\gamma_m > \beta > \alpha_m$ ,  $\beta_m > \gamma$  и  $\gamma_m > \gamma$ .

См. также задачи 10.90, 10.91, 10.93.

## § 8. Неравенства для площади треугольника

**10.53.** Докажите, что:

а)  $3\sqrt{3}r^2 \leq S \leq p^2/3\sqrt{3}$ ;

б)  $S \leq (a^2 + b^2 + c^2)/4\sqrt{3}$ .

**10.54.** Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 \geq 4\sqrt{3}S$ .

**10.55.** Докажите, что:

а)  $S^3 \leq (\sqrt{3}/4)^3 (abc)^2$ ;

б)  $\sqrt[3]{h_a h_b h_c} \leq \sqrt[4]{3} \sqrt{S} \leq \sqrt[3]{r_a r_b r_c}$ .

\* \* \*

**10.56.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , причем  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Докажите, что  $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} \leq 1/4$ .

**10.57.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты произвольные точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Пусть  $a = S_{AB_1C_1}$ ,  $b = S_{A_1BC_1}$ ,  $c = S_{A_1B_1C}$  и  $u = S_{A_1B_1C_1}$ . Докажите, что

$$u^3 + (a+b+c)u^2 \geq 4abc.$$

**10.58.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что площадь одного из треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$  не превосходит:

а)  $S_{ABC}/4$ ;

б)  $S_{A_1B_1C_1}$ .

См. также задачи 9.33, 9.37, 9.40, 10.9, 20.1, 20.7.

## § 9. Против большей стороны лежит больший угол

**10.59.** Докажите, что  $\angle ABC < \angle BAC$  тогда и только тогда, когда  $AC < BC$ , т. е. против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.

**10.60.** Докажите, что в треугольнике угол  $A$  острый тогда и только тогда, когда  $m_a > a/2$

**10.61.** Пусть  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  — два выпуклых четырехугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если  $\angle A > \angle A_1$ , то  $\angle B < \angle B_1$ ,  $\angle C > \angle C_1$ ,  $\angle D < \angle D_1$ .

**10.62.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  наибольшая из высот  $AH$  равна медиане  $BM$ . Докажите, что  $\angle B \leq 60^\circ$ .

**10.63.** Докажите, что выпуклый пятиугольник  $ABCDE$  с равными сторонами, углы которого удовлетворяют неравенствам  $\angle A \geq \angle B \geq \angle C \geq \angle D \geq \angle E$ , является правильным.

## § 10. Отрезок внутри треугольника меньше наибольшей стороны

**10.64.** а) Внутри треугольника  $ABC$  расположен отрезок  $MN$ . Докажите, что длина  $MN$  не превосходит наибольшей стороны треугольника.

б) Внутри выпуклого многоугольника расположен отрезок  $MN$ . Докажите, что длина  $MN$  не превосходит наибольшей стороны или наибольшей диагонали этого многоугольника.

**10.65.** Внутри сектора  $AOB$  круга радиуса  $R = AO = BO$  лежит отрезок  $MN$ . Докажите, что  $MN \leq R$  или  $MN \leq AB$ . (Предполагается, что  $\angle AOB < 180^\circ$ .)

**10.66.** В угол с вершиной  $A$  вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках  $B$  и  $C$ . В области, ограниченной отрезками  $AB$ ,  $AC$  и меньшей дугой  $BC$ , расположен отрезок. Докажите, что его длина не превышает  $AB$ .

**10.67.** Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник. Докажите, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

**10.68.** Даны треугольник  $ABC$  со сторонами  $a > b > c$  и произвольная точка  $O$  внутри его. Пусть прямые  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  пересекают стороны треугольника в точках  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Докажите, что  $OP + OQ + OR < a$ .

## § 11. Неравенства для прямоугольных треугольников

Во всех задачах этого параграфа  $ABC$  — прямоугольный треугольник с прямым углом  $C$ .

**10.69.** Докажите, что  $c^n > a^n + b^n$  при  $n > 2$ .

**10.70.** Докажите, что  $a + b < c + h_c$ .

**10.71.** Докажите, что для прямоугольного треугольника  $0,4 < r/h < 0,5$ , где  $h$  — высота, опущенная из вершины прямого угла.

**10.72.** Докажите, что  $c/r \geq 2(1 + \sqrt{2})$ .

**10.73.** Докажите, что  $m_a^2 + m_b^2 > 29r^2$ .

## § 12. Неравенства для остроугольных треугольников

10.74. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}.$$

10.75. Докажите, что для остроугольного треугольника

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leq \sqrt{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

10.76. Докажите, что если треугольник не тупоугольный, то  $m_a + m_b + m_c \geq 4R$ .

10.77. Докажите, что если в остроугольном треугольнике  $h_a = l_b = m_c$ , то этот треугольник равносторонний.

10.78. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  не превосходит половины периметра треугольника  $ABC$ .

10.79. Пусть  $h$  — наибольшая высота нетупоугольного треугольника. Докажите, что  $r + R \leq h$ .

10.80. На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что

$$2(B_1C_1 \cos \alpha + C_1A_1 \cos \beta + A_1B_1 \cos \gamma) \geq a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma.$$

\* \* \*

10.81. Докажите, что треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$  остроугольный тогда и только тогда, когда  $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$ .

10.82. Докажите, что треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда  $p > 2R + r$ .

10.83. Докажите, что треугольник  $ABC$  остроугольный тогда и только тогда, когда на его сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  можно выбрать такие внутренние точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , что  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ .

10.84. Докажите, что треугольник  $ABC$  остроугольный тогда и только тогда, когда длины его проекций на три различных направления равны.

См. также задачи 9.93, 10.39, 10.44, 10.48, 10.62.

## § 13. Неравенства в треугольниках

10.85. Через точку  $O$  пересечения медиан треугольника  $ABC$  проведена прямая, пересекающая его стороны в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $NO \leq 2MO$ .

**10.86.** Докажите, что если треугольник  $ABC$  лежит внутри треугольника  $A'B'C'$ , то  $r_{ABC} < r_{A'B'C'}$ .

**10.87.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $c$  наибольшая, а  $a$  наименьшая. Докажите, что  $l_c \leq h_a$ .

**10.88.** Медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  перпендикулярны. Докажите, что  $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B \geq 2/3$ .

**10.89.** Через вершину  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  проведена окружность, касающаяся стороны  $BC$  в точке  $M$  и пересекающая сторону  $AB$  в точке  $N$ . Докажите, что  $AN > CM$ .

**10.90.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AD$ , медиана  $BM$  и высота  $CH$  пересекаются в одной точке. В каких пределах может изменяться величина угла  $A$ ?

**10.91.** В треугольнике  $ABC$  стороны равны  $a, b, c$ ; соответственные углы (в радианах) равны  $\alpha, \beta, \gamma$ . Докажите, что  $\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}$ .

**10.92.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $O$ . Докажите, что  $AO \sin BOC + BO \sin AOC + CO \sin AOB \leq p$ .

**10.93.** На продолжении наибольшей стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  за точку  $C$  взята точка  $D$  так, что  $CD = CB$ . Докажите, что угол  $ABD$  не острый.

**10.94.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AK$  и  $CM$ . Докажите, что если  $AB > BC$ , то  $AM > MK > KC$ .

**10.95.** На сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $X, Y, Z$  так, что прямые  $AX, BY, CZ$  пересекаются в одной точке  $O$ . Докажите, что из отношений  $OA:OX, OB:OY, OC:OZ$  по крайней мере одно не больше 2 и одно не меньше 2.

**10.96.** Окружность  $S_1$  касается сторон  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , окружность  $S_2$  касается сторон  $BC$  и  $AB$ , кроме того,  $S_1$  и  $S_2$  касаются друг друга внешним образом. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса вписанной окружности  $S$ .

См. также задачи 14.24, 17.16, 17.18.

### Задачи для самостоятельного решения

**10.97.** Пусть  $a, b$  и  $c$  — длины сторон треугольника,  $P = a + b + c$ ,  $Q = ab + bc + ca$ . Докажите, что  $3Q < P^2 < 4Q$ .

**10.98.** Докажите, что произведение любых двух сторон треугольника больше  $4Rr$ .

**10.99.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AA_1$ . Докажите, что  $A_1C < AC$ .

**10.100.** Докажите, что если  $a > b$  и  $a + h_a \leq b + h_b$ , то  $\angle C = 90^\circ$ .

**10.101.** Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $ab + bc + ca \geq (AO + BO + CO)^2$ .

**10.102.** На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены равносторонние треугольники с центрами  $D, E$  и  $F$ . Докажите, что  $S_{DEF} \geq S_{ABC}$ .

**10.103.** На плоскости даны треугольники  $ABC$  и  $MNK$ , причем прямая  $MN$  проходит через середины сторон  $AB$  и  $AC$ , а в пересечении этих треугольников образуется шестиугольник площади  $S$  с попарно параллельными противоположными сторонами. Докажите, что  $3S < S_{ABC} + S_{MNK}$ .

## Решения

**10.1.** Пусть медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $M$ . Так как  $BC > AC$ , то точки  $A$  и  $C$  лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$ , а значит, по ту же сторону лежат медиана  $CC_1$  и ее точка  $M$ . Следовательно,  $AM < BM$ , т. е.  $m_a < m_b$ .

**10.2.** Предположим, например, что  $a > b$ . Тогда  $m_a < m_b$  (задача 10.1). А так как четырехугольник  $A_1MB_1C$  описанный, то  $\frac{a}{2} + \frac{m_b}{3} = \frac{b}{2} + \frac{m_a}{3}$ , т. е.  $(a - b)/2 = (m_a - m_b)/3$ . Получено противоречие.

**10.3.** Пусть, например,  $BC > AC$ . Тогда  $MA < MB$  (см. задачу 10.1), поэтому  $BC + MB + MC > AC + MA + MC$ .

**10.4.** а) Так как  $c \leq a + b$ , то  $c^2 \leq (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$ .

б) Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Согласно задаче а)  $MA^2 + MB^2 \geq AB^2/2$ , т. е.  $\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} \geq c^2/2$ .

**10.5.** а) Пусть  $M$  — точка пересечения медиан,  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда  $\overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{BO}^2 + \overrightarrow{CO}^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MO})^2 + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MO})^2 = \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MO}) + 3\overrightarrow{MO}^2$ . Так как  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ , то  $\overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{BO}^2 + \overrightarrow{CO}^2 = \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 + \overrightarrow{CM}^2 + 3\overrightarrow{MO}^2 \geq \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 + \overrightarrow{CM}^2$ , т. е.  $3R^2 \geq 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)/9$ .

б) Достаточно заметить, что  $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$  (см. приложение к гл. 9).

**10.6.** Формулу Герона можно переписать в виде  $16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ . А так как  $m_c^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/4$  (задача 12.11, а), то неравенства  $m_c^2 \leq ((a^2 + b^2)/2c)^2$  и  $m_c^2 > ((a^2 - b^2)/2c)^2$  эквивалентны неравенствам  $16S^2 \leq 4a^2b^2$  и  $16S^2 > 0$  соответственно.

**10.7.** Пусть  $y = a^2 + b^2 + c^2$  и  $y_1 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ . Тогда  $3y = 4y_1$  (задача 12.11, б),  $y < 2x$  (задача 9.7) и  $2x_1 + y_1 < 2x + y$ , так как  $(m_a + m_b + m_c)^2 < (a + b + c)^2$  (см. задачу 9.2). Сложив неравенство

$8x_1 + 4y_1 < 8x + 4y$  с равенством  $3y = 4y_1$ , получим  $8x_1 < y + 8x < 10x$ , т. е.  $x_1/x < 5/4$ .

Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Построим треугольник  $AMB$  до параллелограмма  $AMBN$ . Применив к треугольнику  $AMN$  доказанное утверждение, получим  $(x/4)/(4x_1/9) < < 5/4$ , т. е.  $x/x_1 < 20/9$ .

**10.8.** Ясно, что  $h_a \leq b$ ,  $h_b \leq c$ ,  $h_c \leq a$ , причем по крайней мере одно из этих неравенств строгое. Поэтому  $h_a + h_b + h_c < a + b + c$ .

**10.9.** Пусть  $h_a > 1$  и  $h_b > 1$ . Тогда  $a \geq h_b > 1$ . Поэтому  $S = ah_a/2 > 1/2$ .

**10.10.** По условию  $BH \geq AC$ , а так как перпендикуляр короче наклонной, то  $BH \geq AC \geq AM$ . Аналогично  $AM \geq BC \geq BH$ . Поэтому  $BH = AM = AC = BC$ . Поскольку  $AC = AM$ , то отрезки  $AC$  и  $AM$  совпадают, т. е.  $\angle C = 90^\circ$ , а так как  $AC = BC$ , то углы треугольника  $ABC$  равны  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ .

**10.11.** Ясно, что  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} = \frac{a+b}{2S} = \frac{a+b}{(a+b+c)r}$  и  $a+b+c < 2(a+b) < < 2(a+b+c)$ .

**10.12.** Так как  $ah_a = 2S = r(a+b+c)$ , то  $h_a = r \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$ . Сложив такие равенства для  $h_a$ ,  $h_b$  и  $h_c$  и воспользовавшись неравенством  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , получим требуемое.

**10.13.** Так как  $h_a - h_b = 2S(1/a - 1/b) = 2S(b-a)/ab$  и  $2S \leq ab$ , то  $h_a - h_b \leq b - a$ .

**10.14.** Согласно задаче 12.21  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ . Кроме того,  $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq 2/\sqrt{r_b r_c}$ .

**10.15.** Так как  $2 \sin \beta \sin \gamma = \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) \leq 1 + \cos \alpha$ , то

$$\frac{h_a}{a} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} \leq \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

**10.16.** Так как  $b/2R = \sin \beta$ , то после домножения на  $2p$  переходим к неравенству  $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \leq 3 \sin \beta (a^2+ac+c^2)$ . Вычитая из обеих частей  $6S$ , получаем  $a(h_b+h_c)+b(h_a+h_c)+c(h_a+h_b) \leq \leq 3 \sin \beta (a^2+c^2)$ . Так как, например,  $ah_b = a^2 \sin \gamma = a^2 c/2R$ , переходим к неравенству  $a(b^2+c^2)-2b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \leq 0$ . Для доказательства последнего неравенства рассмотрим квадратный трехчлен  $f(x) = x^2(a+c) - 2x(a^2+c^2) + ac(a+c)$ . Легко проверить, что  $f(a) = = -a(a-c)^2 \leq 0$  и  $f(c) = -c(a-c)^2 \leq 0$ . А так как коэффициент при  $x$  положителен и  $a \leq b \leq c$ , то  $f(b) \leq 0$ .

**10.17.** Согласно задаче 12.35, а)  $I_a^2 = 4bcp(p-a)/(b+c)^2$ . Кроме того,  $4bc \leq (b+c)^2$ .

**10.18.** Ясно, что  $h_a/l_a = \cos((\beta - \gamma)/2)$ . Согласно задаче 12.36,а)

$$2r/R = 8 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = 4 \sin(\alpha/2) [\cos((\beta - \gamma)/2) - \cos((\beta + \gamma)/2)] = 4x(q - x), \text{ где } x = \sin(\alpha/2) \text{ и } q = \cos((\beta - \gamma)/2).$$

Остается заметить, что  $4x(q - x) \leq q^2$ .

**10.19.** а) Согласно задаче 10.17  $l_a^2 \leq p(p - a)$ . Складывая три аналогичных неравенства, получаем требуемое.

б) Для любых чисел  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  справедливо неравенство  $(l_a + l_b + l_c)^2 \leq 3(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2)$ .

**10.20.** Достаточно доказать, что  $\sqrt{p(p - a)} + \sqrt{p(p - b)} + m_c \leq \sqrt{3p}$ . Можно считать, что  $p = 1$ ; пусть  $x = 1 - a$  и  $y = 1 - b$ . Тогда  $m_c^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/4 = 1 - (x + y) + (x - y)^2/4 = m(x, y)$ . Рассмотрим функцию  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{m(x, y)}$ . Нужно доказать, что  $f(x, y) \leq \sqrt{3}$  при  $x, y \geq 0$  и  $x + y \leq 1$ . Пусть  $g(x) = f(x, x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{1 - 2x}$ . Так как  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$ , то при возрастании  $x$  от 0 до  $1/3$   $g(x)$  возрастает от 1 до  $\sqrt{3}$ , а при возрастании  $x$  от  $1/3$  до  $1/2$   $g(x)$  убывает от  $\sqrt{3}$  до  $\sqrt{2}$ . Введем новые переменные  $d = x - y$  и  $q = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Легко проверить, что  $(x - y)^2 - 2q^2(x + y) + q^4 = 0$ , т. е.  $x + y = (d^2 + q^4)/2q^2$ . Поэтому

$$f(x, y) = q + \sqrt{1 - \frac{q^2}{2} - \frac{d^2(2 - q^2)}{4q^2}}.$$

Заметим теперь, что  $q^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x + y) \leq 2$ , т. е.  $d^2(2 - q^2)/4q^2 \geq 0$ . Следовательно, при фиксированном  $q$  значение функции  $f(x, y)$  максимально, если  $d = 0$ , т. е.  $x = y$ ; случай  $x = y$  разобран выше.

**10.21.** Ясно, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (h_a + h_b + h_c)/2S$ . Кроме того,  $9r \leq h_a + h_b + h_c$  (задача 10.12) и  $h_a + h_b + h_c \leq m_a + m_b + m_c \leq 9R/2$  (задача 10.5,6).

**10.22.** Докажем сначала, что  $b + c - a < 2bc/a$ . Пусть  $2x = b + c - a$ ,  $2y = a + c - b$  и  $2z = a + b - c$ . Требуется доказать, что  $2x < 2(x + y) \times (x + z)/(y + z)$ , т. е.  $xy + xz < xy + xz + x^2 + yz$ . Последнее неравенство очевидно.

Так как  $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a) - 2bc$ , то

$$\frac{2bc \cos \alpha}{b + c} = b + c - a + \left[ \frac{(b + c - a)a}{b + c} - \frac{2bc}{b + c} \right].$$

Выражение в квадратных скобках отрицательно, так как  $b + c - a < 2bc/a$ .

**10.23.** Согласно задаче 12.30  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 4p^2 - 2r^2 - 2p^2 - 8rR = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$  и  $abc = 4prR$ . Таким образом,

нужно доказать неравенство  $2p^2 - 2r^2 - 8rR < 2(1 - 4prR)$ , где  $p = 1$ . Это неравенство очевидно.

**10.24.** Согласно задаче 12.30  $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr$ . Кроме того,  $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$  (задача 10.34).

**10.25.** Так как  $r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = c = r_c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$ , то

$$c^2 = rr_c \left( 2 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \geq 4rr_c.$$

**10.26.** Достаточно воспользоваться результатами задач 12.36, а) и 10.45. Заметим также, что  $x(1-x) \leq 1/4$ , т. е.  $r/R \leq 1/2$ .

**10.27.** Так как  $h_c \leq a$  и  $h_c \leq b$ , то  $4S = 2ch_c \leq c(a+b)$ . Поэтому  $6r(a+b+c) = 12S \leq 4ab + 4S \leq (a+b)^2 + c(a+b) = (a+b)(a+b+c)$ .

**10.28.** Так как  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$  (задача 12.21), то  $\frac{r_a}{h_a} = \left( \frac{r_a}{r_b} + \frac{r_a}{r_c} \right) / 2$ . Запишем аналогичные равенства для  $r_b/h_b$  и  $r_c/h_c$  и сложим их. Учитывая, что  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , получаем требуемое.

**10.29.** Так как  $Rr = RS/p = abc/4p$  (см. задачу 12.1), то приходим к неравенству  $27abc \leq 8p^3 = (a+b+c)^3$ .

Так как  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  для любых чисел  $a, b$  и  $c$ , то  $p^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)/4 = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$  (см. задачу 12.11, б). Остается заметить, что  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 27R^2/4$  (задача 10.5, а).

**10.30.** Так как  $OA = r/\sin(A/2)$ ,  $OB = r/\sin(B/2)$  и  $OC = r/\sin(C/2)$ , а углы  $\angle A/2$ ,  $\angle B/2$  и  $\angle C/2$  острые, то  $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ . Следовательно,  $\angle A \leq 60^\circ$  и  $\angle B \leq 90^\circ$ , а значит,  $\sin(A/2) \leq 1/2$  и  $\sin(B/2) \leq 1/\sqrt{2}$ .

**10.31.** Если  $\angle C \geq 120^\circ$ , то сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин не меньше  $a+b$  (задача 11.21); кроме того,  $a+b \geq 6r$  (задача 10.27).

Если все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то в точке минимума суммы расстояний до вершин треугольника квадрат этой суммы равен  $(a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\sqrt{3}S$  (задача 18.21, б). Далее,  $(a^2 + b^2 + c^2)/2 \geq 2\sqrt{3}S$  (задача 10.53, б) и  $4\sqrt{3}S \geq 36r^2$  (задача 10.53, а).

**10.32.** Пусть  $\alpha = \cos(A/2)$ ,  $\beta = \cos(B/2)$  и  $\gamma = \cos(C/2)$ . Согласно задаче 12.17, б)  $a/r_a = \alpha/\beta\gamma$ ,  $b/r_b = \beta/\gamma\alpha$  и  $c/r_c = \gamma/\alpha\beta$ . Поэтому после домножения на  $\alpha\beta\gamma$  требуемое неравенство переписывается в виде  $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)$ . Так как  $\alpha^2 = (1 + \cos A)/2$ ,  $\beta^2 = (1 + \cos B)/2$  и  $\gamma^2 = (1 + \cos C)/2$ , то переходим к неравенству  $\cos A + \cos B + \cos C + 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \leq 3$ . Остается воспользоваться результатами задач 10.36 и 10.43.

**10.33.** а) Сложив равенство  $4R + r = r_a + r_b + r_c$  (задача 12.24) с неравенством  $R - 2r \geq 0$  (задача 10.26), получим  $5R - r \geq r_a + r_b + r_c = pr((p-a)^{-1} + (p-b)^{-1} + (p-c)^{-1}) = p(ab + bc + ca - p^2)/S = p(2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2)/4S$ . Остается заметить, что  $2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  (задача 10.54).



6) Легко проверить, что  $4R - r_a = r_b + r_c - r = pr/(p-b) + pr/(p-c) - pr/p = (p-a)(p^2-bc)/S$ . Остается заметить, что  $4(p^2-bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab-bc+ca) = 2(ab+bc+ac) - a^2 - b^2 - c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc) \geq 4\sqrt{3}S + 2(a^2 + (b-c)^2)$ .

**10.34.** Пусть  $a, b$  и  $c$  — длины сторон треугольника,  $F = (a-b) \times (b-c)(c-a) = A-B$ , где  $A = ab^2 + bc^2 + ca^2$  и  $B = a^2b + b^2c + c^2a$ . Докажем, что требуемые неравенства можно получить, преобразовав очевидное неравенство  $F^2 \geq 0$ . Пусть  $\sigma_1 = a+b+c = 2p$ ,  $\sigma_2 = ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR$  и  $\sigma_3 = abc = 4prR$  (см. задачу 12.30). Можно проверить, что  $F^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^2$ . В самом деле,  $(\sigma_1 \sigma_2)^2 - F^2 = (A+B+3abc)^2 - (A-B)^2 = 4AB + 6(A+B)\sigma_3 + 9\sigma_3^2 = 4(a^3b^3 + \dots) + 4(a^4bc + \dots) + 6(A+B)\sigma_3 + 21\sigma_3^2$ . Ясно также, что  $4\sigma_2^3 = 4(a^3b^3 + \dots) + 12(A+B)\sigma_3 + 24\sigma_3^2$ ,  $4\sigma_1^3 \sigma_3 = 4(a^4bc + \dots) + 12(A+B)\sigma_3 + 24\sigma_3^2$  и  $18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 18(A+B)\sigma_3 + 54\sigma_3^2$ .

Выразив  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  через  $p, r$  и  $R$ , получим

$$F^2 = -4r^2[(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 - 4R(R-2r)^3] \geq 0.$$

Следовательно, получаем  $p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} = [(R-2r) - \sqrt{R(R-2r)}]^2 + 16Rr - 5r^2 \geq 16Rr - 5r^2$  и  $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - [(R-2r) - \sqrt{R(R-2r)}]^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ .

**10.35.** Так как  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$  и  $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$  (задачи 12.24 и 12.25), то  $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R+r)^2 - 2p^2$ . Согласно задаче 10.34  $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ , поэтому  $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 8R^2 - 5r^2$ . Остается заметить, что  $r \leq R/2$  (задача 10.26).

**10.36.** а) Согласно задаче 12.38  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (R+r)/R$ . Кроме того,  $r \leq R/2$  (задача 10.26).

б) Следует из а) (см. замечание).

**10.37.** а) Ясно, что  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = p/R$ . Кроме того,  $p \leq 3\sqrt{3}R/2$  (задача 10.29).

б) Следует из а) (см. замечание).

**10.38.** а) Согласно задаче 12.44, а)  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4S$ . Кроме того,  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$  (задача 10.53, б).

б) Следует из а) (см. замечание).

**10.39.** а) Согласно задаче 12.45, а)  $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) = p/r$ . Кроме того,  $p \geq 3\sqrt{3}r$  (задача 10.53, а).

б) Следует из а) (см. замечание). Для тупоугольного треугольника  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma < 0$ ; см., например, задачу 12.46.

**10.40.** а) Согласно задаче 12.36, а)  $\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = r/4R$ . Кроме того,  $r \leq R/2$  (задача 10.26).

б) Для остроугольного треугольника следует из а) (см. замечание). Для тупоугольного треугольника  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma < 0$ .

**10.41.** а) Так как  $\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$ , то, используя результаты задач 12.36,а) и 12.36,в), получаем  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = pr/2R^2$ . Кроме того,  $p \leq 3\sqrt{3}R/2$  (задача 10.29) и  $r \leq R/2$  (задача 10.26).

б) Следует из а) (см. замечание).

**10.42.** Согласно задаче 12.39,б)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ . Остается заметить, что  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1/8$  (задача 10.40,б), а для тупоугольного треугольника  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma < 0$ .

**10.43.** Ясно, что  $2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha) = (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma$ . Остается заметить, что  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$  (задача 10.36,а) и  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq 3/4$  (задача 10.42).

**10.44.** Пусть продолжения биссектрис остроугольного треугольника  $ABC$  с углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Тогда  $S_{ABC} = R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)/2$  и  $S_{A_1B_1C_1} = R^2(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha))/2$ . Остается воспользоваться результатами задач 12.72 и 10.26.

**10.45.** Ясно, что  $2 \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = \cos((\beta - \gamma)/2) - \cos((\beta + \gamma)/2) \leq 1 - \sin(\alpha/2)$ .

**10.46.** Опустим из вершин  $A$  и  $B$  перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  на биссектрису угла  $ACB$ . Тогда  $AB \geq AA_1 + BB_1 = b \sin(\gamma/2) + a \sin(\gamma/2)$ .

**10.47.** Согласно задаче 12.32  $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) = (a + b - c)/(a + b + c)$ . А так как  $a + b < 3c$ , то  $a + b - c < (a + b + c)/2$ .

**10.48.** Так как  $\pi - 2\alpha > 0$ ,  $\pi - 2\beta > 0$ ,  $\pi - 2\gamma > 0$  и  $(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi$ , существует треугольник с углами  $\pi - 2\alpha$ ,  $\pi - 2\beta$ ,  $\pi - 2\gamma$ . Длины сторон, противолежащих углам  $\pi - 2\alpha$ ,  $\pi - 2\beta$ ,  $\pi - 2\gamma$ , пропорциональны числам  $\sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ ,  $\sin 2\beta$ ,  $\sin 2\gamma$ . Поскольку  $\pi - 2\alpha > \pi - 2\beta > \pi - 2\gamma$  и против большего угла лежит большая сторона, то  $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$ .

**10.49.** Заметим сначала, что  $\cos 2\gamma = \cos 2(\pi - \alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta$ . Поэтому  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\alpha \times \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta$ . Так как  $a \cos \varphi + b \sin \varphi \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  (см. приложение к гл. 9), то  $(1 - \cos 2\beta) \cos 2\alpha + \sin 2\beta \sin 2\alpha + \cos 2\beta \leq$

$\leq \sqrt{(1 - \cos 2\beta)^2 + \sin^2 2\beta} + \cos 2\beta = 2|\sin \beta| + 1 - 2\sin^2 \beta$ . Остается заметить, что наибольшее значение квадратного трехчлена  $2t + 1 - 2t^2$  достигается в точке  $t = 1/2$  и равно  $3/2$ . Максимальное значение соответствует углам  $\alpha = \beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ .

**10.50.** Так как  $AB < CB$ ,  $AX < CX = S_{ABX} = S_{BCX}$ , то  $\sin XAB > \sin XCB$ . Учитывая, что угол  $XCB$  острый, получаем требуемое.

**10.51.** Если углы треугольника  $ABC$  равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , то углы треугольника  $A_1B_1C_1$  равны  $(\beta + \gamma)/2$ ,  $(\gamma + \alpha)/2$  и  $(\alpha + \beta)/2$ .

**10.52.** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Построив треугольник  $AMB$  до параллелограмма  $AMBN$ , получим  $\angle BMC_1 = \alpha_m$  и  $\angle AMC_1 = \beta_m$ . Легко проверить, что  $\angle C_1CB < \gamma/2$  и  $\angle B_1BC < \beta/2$ . Следовательно,  $\alpha_m = \angle C_1CB + \angle B_1BC < (\beta + \gamma)/2 < \beta$ . Аналогично  $\gamma_m = \angle A_1AB + \angle B_1BA > (\alpha + \beta)/2 > \beta$ .

Предположим сначала, что треугольник  $ABC$  остроугольный. Тогда точка  $H$  пересечения высот лежит внутри треугольника  $AMC_1$ . Следовательно,  $\angle AMB < \angle AHB$ , т. е.  $\pi - \gamma_m < \pi - \gamma$ , и  $\angle CMB > \angle CHB$ , т. е.  $\pi - \alpha_m > \pi - \alpha$ . Предположим теперь, что угол  $\alpha$  тупой. Тогда угол  $CC_1B$  тоже тупой, а значит, угол  $\alpha_m$  острый, т. е.  $\alpha_m < \alpha$ . Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MX$  на  $BC$ . Тогда  $\gamma_m > \angle XMB > 180^\circ - \angle HAB > \gamma$ .

Так как  $\alpha > \alpha_m$ , то  $\alpha + (\pi - \alpha_m) > \pi$ , т. е. точка  $M$  лежит внутри описанной окружности треугольника  $AB_1C_1$ . Следовательно,  $\gamma = \angle AB_1C_1 < \angle AMC_1 = \beta_m$ . Аналогично  $\alpha = \angle CB_1A_1 > \angle CMA_1 = \beta_m$ , так как  $\gamma + (\pi - \gamma_m) < \pi$ .

**10.53.** а) Ясно, что  $S^2/p = (p-a)(p-b)(p-c) \leq ((p-a+p-b+p-c)/3)^3 = p^3/27$ . Поэтому  $pr = S \leq p^2/3\sqrt{3}$ , т. е.  $r \leq p/3\sqrt{3}$ . Домножив последнее неравенство на  $r$ , получим требуемое.

б) Так как  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ , то  $S \leq p^2/3\sqrt{3} = (a+b+c)^2/12\sqrt{3} \leq (a^2+b^2+c^2)/4\sqrt{3}$ .

**10.54.** Пусть  $x=p-a$ ,  $y=p-b$ ,  $z=p-c$ . Тогда  $(a^2-(b-c)^2) + (b^2-(a-c)^2) + (c^2-(a-b)^2) = 4(p-b)(p-c) + 4(p-a)(p-c) + 4(p-a)(p-b) = 4(yz+zx+xy)$  и

$$4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3(x+y+z)xyz}.$$

Итак, нужно доказать неравенство  $xy+yz+zx \geq \sqrt{3(x+y+z)xyz}$ . После возведения в квадрат и сокращения получаем

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + y^2xz + z^2xy.$$

Складывая неравенства  $x^2yz \leq x^2(y^2+z^2)/2$ ,  $y^2xz \leq y^2(x^2+z^2)/2$  и  $z^2xy \leq z^2(x^2+y^2)/2$ , получаем требуемое.

**10.55.** а) Перемножив три равенства вида  $S = (ab \sin \gamma)/2$ , получим  $S^3 = ((abc)^2 \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha)/8$ . Остается воспользоваться результатом задачи 10.41.

б) Так как  $(h_a h_b h_c)^2 = (2S)^6 / (abc)^2$  и  $(abc)^2 \geq (4/\sqrt{3})^3 S^3$ , то  $(h_a h_b h_c)^2 \leq (2S)^6 (\sqrt{3}/4)^3 / S^3 = (\sqrt{3}S)^3$ .

Так как  $(r_a r_b r_c)^2 = S^4 / r^2$  (задача 12.18, в) и  $r^2 (\sqrt{3})^3 \leq S$  (задача 10.53, а), то  $(r_a r_b r_c)^2 \geq (\sqrt{3}S)^3$ .

**10.56.** Пусть  $p = BA_1/BC$ ,  $q = CB_1/CA$  и  $r = AC_1/AC$ . Тогда  $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 1 - p(1-r) - q(1-p) - r(1-q) = 1 - (p+q+r) + (pq+qr+rp)$ . По теореме Чевы (задача 5.70)  $pqr = (1-p)(1-q)(1-r)$ , т. е.  $2pqr = 1 - (p+q+r) + (pq+qr+rp)$ ; кроме того,  $(pqr)^2 = p(1-p)q(1-q) \times r(1-r) \leq (1/4)^3$ . Следовательно,  $S_{A_1B_1C_1}/S_{ABC} = 2pqr \leq \frac{1}{4}$ .

**10.57.** Можно считать, что площадь треугольника  $ABC$  равна 1. Тогда  $a+b+c = 1-u$ , поэтому данное неравенство перепишется в виде  $u^2 \geq 4abc$ . Пусть  $x = BA_1/BC$ ,  $y = CB_1/CA$  и  $z = AC_1/AB$ . Тогда

$u = 1 - (x + y + z) + xy + yz + zx$  и  $abc = xyz(1-x)(1-y)(1-z) = v(u-v)$ , где  $v = xyz$ . Поэтому мы переходим к неравенству  $u^2 \geq 4v(u-v)$ , т. е.  $(u-2v)^2 \geq 0$ . Последнее неравенство очевидно.

**10.58.** а) Пусть  $x = BA_1/BC$ ,  $y = CB_1/CA$  и  $z = AC_1/AB$ . Можно считать, что площадь треугольника  $ABC$  равна 1. Тогда  $S_{AB_1C_1} = z(1-y)$ ,  $S_{A_1BC_1} = x(1-z)$  и  $S_{A_1B_1C} = y(1-x)$ . Так как  $x(1-x) \leq 1/4$ ,  $y(1-y) \leq 1/4$  и  $z(1-z) \leq 1/4$ , то произведение чисел  $S_{AB_1C_1}$ ,  $S_{A_1BC_1}$  и  $S_{A_1B_1C}$  не превосходит  $(1/4)^3$ , а значит, одно из них не превосходит  $1/4$ .

б) Пусть для определенности  $x \geq 1/2$ . Если  $y \leq 1/2$ , то при гомотетии с центром  $C$  и коэффициентом 2 точки  $A_1$  и  $B_1$  переходят во внутренние точки сторон  $BC$  и  $AC$ , а значит,  $S_{A_1B_1C} \leq S_{A_1B_1C_1}$ . Поэтому можно считать, что  $y \geq 1/2$  и аналогично  $z \geq 1/2$ . Пусть  $x = (1+\alpha)/2$ ,  $y = (1+\beta)/2$  и  $z = (1+\gamma)/2$ . Тогда  $S_{AB_1C_1} = (1+\gamma-\beta-\beta\gamma)/4$ ,  $S_{A_1BC_1} = (1+\alpha-\gamma-\alpha\gamma)/4$  и  $S_{A_1B_1C} = (1+\beta-\alpha-\alpha\beta)/4$ , а значит,  $S_{A_1B_1C_1} = (1+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)/4 \geq 1/4$  и  $S_{AB_1C_1} + S_{A_1BC_1} + S_{A_1B_1C} \leq 3/4$ .

**10.59.** Достаточно доказать, что если  $AC < BC$ , то  $\angle ABC < \angle BAC$ . Так как  $AC < BC$ , то на стороне  $BC$  можно выбрать точку  $A_1$  так, что  $A_1C = AC$ . Тогда  $\angle BAC > \angle A_1AC = \angle AA_1C > \angle ABC$ .

**10.60.** Пусть  $A_1$  — середина стороны  $BC$ . Если  $AA_1 < BC/2 = BA_1 = A_1C$ , то  $\angle BAA_1 > \angle ABA_1$  и  $\angle CAA_1 > \angle ACA_1$ , поэтому  $\angle A = \angle BAA_1 + \angle CAA_1 > \angle B + \angle C$ , т. е.  $\angle A > 90^\circ$ . Аналогично, если  $AA_1 > BC/2$ , то  $\angle A < 90^\circ$ .

**10.61.** Если мы фиксируем две стороны треугольника, то чем больше будет угол между ними, тем больше будет третья сторона. Поэтому из неравенства  $\angle A > \angle A_1$  следует, что  $BD > B_1D_1$ , т. е.  $\angle C > \angle C_1$ . Предположим теперь, что  $\angle B \geq \angle B_1$ . Тогда  $AC \geq A_1C_1$ , т. е.  $\angle D \geq \angle D_1$ . Поэтому  $360^\circ = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D > \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 = 360^\circ$ . Получено противоречие; следовательно,  $\angle B < \angle B_1$  и  $\angle D < \angle D_1$ .

**10.62.** Пусть точка  $B_1$  симметрична  $B$  относительно точки  $M$ . Так как высота, опущенная из точки  $M$  на сторону  $BC$ , равна половине  $AN$ , т. е. половине  $BM$ , то  $\angle MBC = 30^\circ$ . Поскольку  $AN$  — наибольшая из высот, то  $BC$  — наименьшая из сторон. Поэтому  $AB_1 = BC \leq AB$ , т. е.  $\angle ABB_1 \leq \angle AB_1B = \angle MBC = 30^\circ$ . Следовательно,  $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle MBC \leq 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ .

**10.63.** Предположим сначала, что  $\angle A > \angle D$ . Тогда  $BE > EC$  и  $\angle EBA < \angle ECD$ . Так как в треугольнике  $EBC$  сторона  $BE$  больше стороны  $EC$ , то  $\angle EBC < \angle ECB$ . Поэтому  $\angle B = \angle ABE + \angle EBC < \angle ECD + \angle ECB = \angle C$ , что противоречит условию задачи. Значит,  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ . Аналогично предположение  $\angle B > \angle E$  приводит к неравенству  $\angle C < \angle D$ . Поэтому  $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$ .

**10.64.** Будем проводить доказательство сразу для общего случая. Пусть прямая  $MN$  пересекает стороны многоугольника в точках  $M_1$  и  $N_1$ . Ясно, что  $MN \leq M_1N_1$ . Пусть точка  $M_1$  лежит на стороне

$AB$ , а точка  $N_1$  — на  $PQ$ . Так как  $\angle AM_1N_1 + \angle BM_1N_1 = 180^\circ$ , то один из этих углов не меньше  $90^\circ$ . Пусть для определенности  $\angle AM_1N_1 \geq 90^\circ$ . Тогда  $AN_1 \geq M_1N_1$ , так как против большего угла лежит большая сторона. Аналогично доказывается, что либо  $AN_1 \leq AP$ , либо  $AN_1 \leq AQ$ . Следовательно, длина отрезка  $MN$  не превосходит длины отрезка с концами в вершинах многоугольника.

**10.65.** Отрезок можно продолжить до пересечения с границей сектора, так как при этом его длина только увеличится. Поэтому можно считать, что точки  $M$  и  $N$  лежат на границе сектора. Возможны три случая.

1. Точки  $M$  и  $N$  лежат на дуге окружности. Тогда  $MN = 2R \sin(MON/2) \leq 2R \sin(AOB/2) = AB$ , так как  $\angle MON/2 \leq \angle AOB/2 \leq 90^\circ$ .

2. Точки  $M$  и  $N$  лежат на отрезках  $AO$  и  $BO$ . Тогда  $MN$  не превосходит наибольшей стороны треугольника  $AOB$ .

3. Одна из точек  $M$  и  $N$  лежит на дуге окружности, а другая — на отрезке  $AO$  или  $BO$ . Пусть для определенности  $M$  лежит на  $AO$ , а  $N$  — на дуге окружности. Тогда  $MN$  не превосходит наибольшей стороны треугольника  $ANO$ . Остается заметить, что  $AO = NO = R$  и  $AN \leq AB$ .

**10.66.** Если данный отрезок не имеет общих точек с окружностью, то с помощью гомотетии с центром  $A$  (и коэффициентом больше 1) его можно перевести в отрезок, имеющий общую точку  $X$  с дугой  $AB$  и лежащий в нашей области. Проведем через точку  $X$  касательную  $DE$  к окружности (точки  $D$  и  $E$  лежат на отрезках  $AB$  и  $AC$ ). Тогда отрезки  $AD$  и  $AE$  меньше  $AB$  и  $DE < (DE + AD + AE)/2 = AB$ , т. е. все стороны треугольника  $ADE$  меньше  $AB$ . Так как наш отрезок лежит внутри треугольника  $ADE$  (или на его стороне  $DE$ ), то его длина не превосходит  $AB$ .

**10.67.** Предположим сначала, что центр  $O$  окружности лежит внутри данного пятиугольника  $A_1A_2A_3A_4A_5$ . Рассмотрим углы  $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_5OA_1$ . В сумме эти пять углов дают  $2\pi$ , поэтому один из них, например  $A_1OA_2$ , не превосходит  $2\pi/5$ . Тогда отрезок  $A_1A_2$  можно поместить в сектор  $OBC$ , где  $\angle BOC = 2\pi/5$  и точки  $B$  и  $C$  расположены на окружности. В треугольнике  $OBC$  наибольшей стороной является  $BC$ , поэтому  $A_1A_2 \leq BC$ .

Если точка  $O$  не принадлежит данному пятиугольнику, то углы  $A_1OA_2, \dots, A_5OA_1$  дают в объединении угол меньше  $\pi$ , причем каждая точка этого угла покрыта ими дважды. Поэтому в сумме эти пять углов дают меньше  $2\pi$ , т. е. один из них меньше  $2\pi/5$ . Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему случаю.

Если точка  $O$  лежит на стороне пятиугольника, то один из рассматриваемых углов не больше  $\pi/4$ , а если она является его вершиной, то один из них не больше  $\pi/3$ . Ясно, что  $\pi/4 < \pi/3 < 2\pi/5$ .

**10.68.** Возьмем на сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  так, что  $B_1C_2 \parallel BC$ ,  $C_1A_2 \parallel CA$ ,  $A_1B_2 \parallel AB$  (рис. 121). В треугольниках  $A_1A_2O$ ,  $B_1B_2O$ ,  $C_1C_2O$  наибольшими сторонами являются  $A_1A_2$ ,  $B_1O$ ,  $C_2O$  соответственно. Поэтому  $OP < A_1A_2$ ,  $OQ < B_1O$ ,  $OR < C_2O$ , т. е.

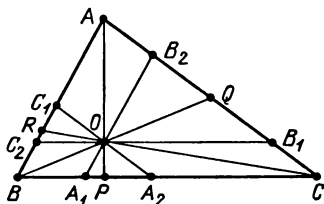


Рис. 121

$OP + OQ + OR < A_1A_2 + B_1O + C_2O = A_1A_2 + CA_2 + BA_1 = BC$ .

**10.69.** Так как  $c^2 = a^2 + b^2$ , то  $c^n = (a^2 + b^2)c^{n-2} = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2} > a^n + b^n$ .

**10.70.** Высота любого треугольника больше  $2r$ . Кроме того, в прямоугольном треугольнике  $2r = a + b - c$  (задача 5.15).

**10.71.** Так как  $ch = 2S = r(a + b + c)$  и  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , то  $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{x + 1}$ , где  $x = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2}}$ . Так как  $0 < 2ab / (a^2 + b^2) \leq 1$ , то  $1 < x \leq \sqrt{2}$ . Следовательно,  $2/5 < 1 / (1 + \sqrt{2}) \leq r/h < 1/2$ .

**10.72.** Ясно, что  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  и  $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$ . Поэтому

$$\frac{c^2}{r^2} = \frac{(a + b + c)^2 c^2}{a^2 b^2} \geq \frac{(2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab})^2 \cdot 2ab}{a^2 b^2} = 4(1 + \sqrt{2})^2.$$

**10.73.** Согласно задаче 12.11, а)  $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2)/4 = 5c^2/4$ . Кроме того,  $5c^2/4 \geq 5(1 + \sqrt{2})^2 r^2 = (15 + 10\sqrt{2})r^2 > 29r^2$  (см. задачу 10.72).

**10.74.** Пусть  $O$  — центр описанной окружности,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Тогда  $m_a = AA_1 \leq AO + OA_1 = R + OA_1$ . Аналогично  $m_b \leq R + OB_1$  и  $m_c \leq R + OC_1$ . Следовательно,

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq R \left( \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}.$$

Остается воспользоваться результатом задачи 12.22 и решением задачи 4.46.

**10.75.** Согласно задаче 4.47  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos(\alpha/2)}{l_a} \geq \frac{\sqrt{2}}{l_a}$ . Складывая три аналогичных неравенства, получаем требуемое.

**10.76.** Обозначим точку пересечения медиан через  $M$ , а центр описанной окружности через  $O$ . Если треугольник  $ABC$  не тупоугольный, то точка  $O$  лежит внутри его (или на его стороне); для определенности будем считать, что она лежит внутри треугольника



**10.82.** Достаточно заметить, что  $p^2 - (2R + r)^2 = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  (см. задачу 12.41, б).

**10.83.** Пусть  $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ . Если треугольник  $ABC$  не остроугольный, то  $CC_1 < AC < AA_1$  для любых точек  $A_1$  и  $C_1$  на сторонах  $BC$  и  $AB$ . Докажем теперь, что для остроугольного треугольника можно выбрать точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , обладающие требуемым свойством. Для этого достаточно проверить, что существует число  $x$ , удовлетворяющее следующим неравенствам:  $h_a \leq x < \max(b, c) = c$ ,  $h_b \leq x < \max(a, c) = c$  и  $h_c \leq x < \max(a, b) = b$ . Остается заметить, что  $\max(h_a, h_b, h_c) = h_a$ ,  $\min(b, c) = b$  и  $h_a < b$ .

**10.84.** Пусть  $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ . Предположим сначала, что треугольник  $ABC$  остроугольный. При повороте прямой  $l$ , в исходном положении параллельной  $AB$ , длина проекции треугольника на  $l$  будет сначала монотонно изменяться от  $c$  до  $h_b$ , затем от  $h_b$  до  $a$ , от  $a$  до  $h_c$ , от  $h_c$  до  $b$ , от  $b$  до  $h_a$  и, наконец, от  $h_a$  до  $c$ . Так как  $h_b < a$ , то существует такое число  $x$ , что  $h_b < x < a$ . Легко проверить, что отрезок длиной  $x$  встречается на любом из первых четырех интервалов монотонности.

Предположим теперь, что треугольник  $ABC$  не остроугольный. При повороте прямой  $l$ , в исходном положении параллельной  $AB$ , длина проекции треугольника на  $l$  монотонно убывает сначала от  $c$  до  $h_b$ , затем от  $h_b$  до  $h_c$ ; после этого она монотонно возрастает сначала от  $h_c$  до  $h_a$ , а затем от  $h_a$  до  $c$ . Всего получается два интервала монотонности.

**10.85.** Пусть точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $AC$  соответственно. Проведем через вершину  $C$  прямую, параллельную стороне  $AB$ . Пусть  $N_1$  — точка пересечения этой прямой и прямой  $MN$ . Тогда  $N_1O : MO = 2$ , но  $NO \leq N_1O$ , поэтому  $NO : MO \leq 2$ .

**10.86.** Окружность  $S$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , лежит внутри треугольника  $A'B'C'$ . Проведя к этой окружности касательные, параллельные сторонам треугольника  $A'B'C'$ , можно получить треугольник  $A''B''C''$ , подобный треугольнику  $A'B'C'$ , для которого  $S$  является вписанной окружностью. Поэтому  $r_{ABC} = r_{A''B''C''} < r_{A'B'C'}$ .

**10.87.** Биссектриса  $l_c$  разбивает треугольник  $ABC$  на два треугольника, удвоенные площади которых равны  $al_c \sin(\gamma/2)$  и  $bl_c \sin(\gamma/2)$ . Поэтому  $ah_a = 2S = l_c(a+b) \sin(\gamma/2)$ . Из условия задачи следует, что  $a/(a+b) \leq 1/2 \leq \sin(\gamma/2)$ .

**10.88.** Ясно, что  $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = c/h_c \geq c/m_c$ . Пусть  $M$  — точка пересечения медиан,  $N$  — середина отрезка  $AB$ . Так как треугольник  $AMB$  прямоугольный,  $MN = AB/2$ . Следовательно,  $c = 2MN = 2m_c/3$ .

**10.89.** Так как  $BN \cdot BA = BM^2$  и  $BM < BA$ , то  $BN < BM$ , а значит,  $AN > CN$ .

**10.90.** Проведем через точку  $B$  перпендикуляр к стороне  $AB$ . Пусть  $F$  — точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением стороны  $AC$  (рис. 123). Докажем, что биссектриса  $AD$ , медиана  $BM$



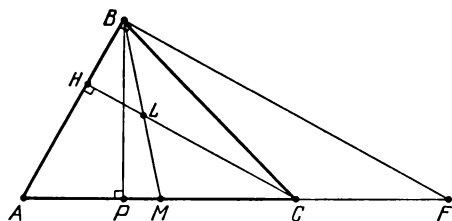


Рис. 123

и высота  $CH$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $AB=CF$ . В самом деле, пусть  $L$  — точка пересечения  $BM$  и  $CH$ . Биссектриса  $AD$  проходит через точку  $L$  тогда и только тогда, когда  $BA:AM=BL:LM$ , но  $BL:LM=FC:CM=FC:AM$ .

Если на стороне  $AF$  некоторого прямоугольного треугольника  $ABF$  ( $\angle ABF=90^\circ$ ) отложить отрезок  $CF=AB$ , то углы  $BAC$  и  $ABC$  будут острыми. Остается выяснить, в каких случаях угол  $ACB$  будет острым. Опустим из точки  $B$  перпендикуляр  $BP$  на сторону  $AF$ . Угол  $ACB$  острый, если  $FP>FC=AB$ , т. е.  $BF \sin A > BF \operatorname{ctg} A$ . Следовательно,  $1 - \cos^2 A = \sin^2 A > \cos A$ , т. е.  $\cos A < (\sqrt{5}-1)/2$ . В итоге получаем, что

$$90^\circ > \angle A > \arccos((\sqrt{5}-1)/2) \approx 51^\circ 50'.$$

**10.91.** Так как против большей стороны лежит больший угол, то  $(a-b)(\alpha-\beta) \geq 0$ ,  $(b-c)(\beta-\gamma) \geq 0$  и  $(a-c)(\alpha-\gamma) \geq 0$ . Складывая эти неравенства, получаем  $2(\alpha a + b\beta + c\gamma) \geq a(\beta+\gamma) + b(\alpha+\gamma) + c(\alpha+\beta) = (a+b+c)\pi - \alpha - b\beta - c\gamma$ , т. е.  $\pi/3 \leq (\alpha a + b\beta + c\gamma)/(a+b+c)$ .

Из неравенства треугольника следует, что

$$\alpha(b+c-a) + \beta(a+c-b) + \gamma(a+b-c) > 0,$$

т. е.  $a(\beta+\gamma-\alpha) + b(\alpha+\gamma-\beta) + c(\alpha+\beta-\gamma) > 0$ . Так как  $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ , то  $a(\pi-2\alpha) + b(\pi-2\beta) + c(\pi-2\gamma) > 0$ , т. е.  $(\alpha a + b\beta + c\gamma)/(a+b+c) < \pi/2$ .

**10.92.** Возьмем на лучах  $OB$  и  $OC$  такие точки  $C_1$  и  $B_1$ , что  $OC_1=OC$  и  $OB_1=OB$ . Пусть  $B_2$  и  $C_2$  — проекции точек  $B_1$  и  $C_1$  на прямую, перпендикулярную  $AO$ . Тогда  $BO \sin AOC + CO \sin AOB = B_2C_2 \leq BC$ . Сложив три аналогичных неравенства, получим требуемое. Легко проверить также, что условие  $B_1C_1 \perp AO$ ,  $C_1A_1 \perp BO$  и  $A_1B_1 \perp CO$  эквивалентно тому, что  $O$  — точка пересечения биссектрис.

**10.93.** Так как  $\angle CBD = \angle C/2$  и  $\angle B \geq \angle A$ , то  $\angle ABD = \angle B + \angle CBD \geq (\angle A + \angle B + \angle C)/2 = 90^\circ$ .

**10.94.** По свойству биссектрисы  $BM:MA=BC:CA$  и  $BK:KC=BA:AC$ . Поэтому  $BM:MA < BK:KC$ , т. е.

$$\frac{AB}{AM} = 1 + \frac{BM}{MA} < 1 + \frac{BK}{KC} = \frac{CB}{CK}.$$

Следовательно, точка  $M$  более удалена от прямой  $AC$ , чем точка  $K$ , т. е.  $\angle AKM > \angle KAC = \angle KAM$  и  $\angle KMC < \angle MCA = \angle MCK$ . Поэтому  $AM > MK$  и  $MK > KC$  (см. задачу 10.59).

**10.95.** Предположим, что все данные отношения меньше 2. Тогда  $S_{ABO} + S_{AOC} < 2S_{XBO} + 2S_{XOC} = 2S_{OBC}$ ,  $S_{ABO} + S_{OBC} < 2S_{AOC}$  и  $S_{AOC} + S_{OBC} < 2S_{ABO}$ . Сложив эти неравенства, приходим к противоречию. Аналогично доказывается, что одно из данных соотношений не больше 2.

**10.96.** Обозначим радиусы окружностей  $S$ ,  $S_1$  и  $S_2$  через  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$ . Пусть треугольники  $AB_1C_1$  и  $A_2BC_2$  подобны треугольнику  $ABC$ , причем коэффициенты подобия равны  $r_1/r$  и  $r_2/r$  соответственно. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  являются вписанными для треугольников  $AB_1C_1$  и  $A_2BC_2$ . Следовательно, эти треугольники пересекаются, так как иначе окружности  $S_1$  и  $S_2$  не имели бы общих точек. Поэтому  $AB_1 + A_2B > AB$ , т. е.  $r_1 + r_2 > r$ .

## ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

---

### Основные сведения

1. Геометрические задачи на максимум и минимум тесно связаны с геометрическими неравенствами, так как для решения этих задач всегда нужно доказать соответствующее геометрическое неравенство и, кроме того, доказать, что оно обращается в равенство. Поэтому, прежде чем решать задачи на максимум и минимум, следует еще раз посмотреть приложение к гл. 9, обращая особое внимание на условия, при которых нестрогие неравенства становятся равенствами.

2. Для элементов треугольника используются те же обозначения, что и в гл. 9.

3. Задачи на максимум и минимум иногда называются *экстремальными* задачами (от лат. *extremum* — «крайний»).

### Вводные задачи

1. Среди всех треугольников с данными сторонами  $AB$  и  $AC$  найдите тот, у которого наибольшая площадь.

2. Внутри треугольника  $ABC$  найдите точку, из которой сторона  $AB$  видна под наименьшим углом.

3. Докажите, что среди всех треугольников с данными стороной  $a$  и высотой  $h_a$  наибольшую величину угла  $\alpha$  имеет равнобедренный треугольник.

4. Среди всех треугольников с данными сторонами  $AB$  и  $AC$  ( $AB < AC$ ) найдите тот, у которого радиус описанной окружности максимален.

5. Диагонали выпуклого четырехугольника равны  $d_1$  и  $d_2$ . Какое наибольшее значение может иметь его площадь?

### § 1. Треугольник

11.1. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным углом  $\alpha$  и площадью  $S$  наименьшую длину стороны  $BC$  имеет равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ .

11.2. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным углом  $\alpha$  и полупериметром  $p$  наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ .

**11.3.** Докажите, что среди всех треугольников с фиксированным полупериметром  $p$  наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

**11.4.** Рассмотрим все остроугольные треугольники с заданными стороной  $a$  и углом  $\alpha$ . Чему равен максимум суммы квадратов длин сторон  $b$  и  $c$ ?

**11.5.** Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого максимальна сумма квадратов длин сторон.

**11.6.** Периметр треугольника  $ABC$  равен  $2p$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $MN \parallel BC$  и  $MN$  касается вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Найдите наибольшее значение длины отрезка  $MN$ .

**11.7.** В данный треугольник поместите центрально симметричный многоугольник наибольшей площади.

**11.8.** Площадь треугольника  $ABC$  равна 1. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон  $BC, CA, AB$  соответственно. На отрезках  $AB_1, CA_1, BC_1$  взяты точки  $K, L, M$  соответственно. Чему равна минимальная площадь общей части треугольников  $KLM$  и  $A_1B_1C_1$ ?

**11.9.** Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, из которой можно вырезать любой треугольник площадью 1?

\* \* \*

**11.10.** Докажите, что треугольники с длинами сторон  $a, b, c$  и  $a_1, b_1, c_1$  подобны тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}.$$

**11.11.** Докажите, что если  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  — углы двух треугольников, то

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

**11.12.** Пусть  $a, b$  и  $c$  — длины сторон треугольника площади  $S$ ;  $\alpha_1, \beta_1$  и  $\gamma_1$  — углы некоторого другого треугольника. Докажите, что  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha_1 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_1 + c^2 \operatorname{ctg} \gamma_1 \geq 4S$ , причем равенство достигается, только если рассматриваемые треугольники подобны.

**11.13.** Пусть  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника со сторонами  $a, b$  и  $c$ , причем  $a \geq b \geq c$ ;  $x, y$  и  $z$  — углы некоторого другого треугольника. Докажите, что

$$bc + ca - ab < bc \cos x + ca \cos y + ab \cos z \leq (a^2 + b^2 + c^2)/2.$$

См. также задачу 17.21.

## § 2. Экстремальные точки треугольника

**11.14.** На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  взята точка  $X$ ;  $M$  и  $N$  — ее проекции на катеты  $AC$  и  $BC$ .

а) При каком положении точки  $X$  длина отрезка  $MN$  будет наименьшей?

б) При каком положении точки  $X$  площадь четырехугольника  $CMXN$  будет наибольшей?

**11.15.** Из точки  $M$ , лежащей на стороне  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$ , опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на стороны  $BC$  и  $AC$ . При каком положении точки  $M$  длина отрезка  $PQ$  минимальна?

**11.16.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите на прямой  $AB$  точку  $M$ , для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников  $ACM$  и  $BCM$  была бы наименьшей.

**11.17.** Из точки  $M$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на прямые  $AB$  и  $AC$ . При каком положении точки  $M$  длина отрезка  $PQ$  максимальна?

**11.18.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $O$ . Пусть  $d_a$ ,  $d_b$ ,  $d_c$  — расстояния от нее до прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . При каком положении точки  $O$  произведение  $d_a d_b d_c$  будет наибольшим?

**11.19.** Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  взяты на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , причем отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $M$ . При каком положении точки  $M$  величина  $\frac{MA_1}{AA_1} \cdot \frac{MB_1}{BB_1} \cdot \frac{MC_1}{CC_1}$  максимальна?

**11.20.** Из точки  $M$ , лежащей внутри данного треугольника  $ABC$ , опущены перпендикуляры  $MA_1$ ,  $MB_1$ ,  $MC_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Для каких точек  $M$  внутри данного треугольника  $ABC$  величина  $a/MA_1 + b/MB_1 + c/MC_1$  принимает наименьшее значение?

**11.21.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите внутри его точку  $O$ , для которой сумма длин отрезков  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  минимальна. (Обратите внимание на тот случай, когда один из углов треугольника больше  $120^\circ$ .)

**11.22.** Найдите внутри треугольника  $ABC$  точку  $O$ , для которой сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника минимальна.

См. также задачу 18.21, а).

## § 3. Угол

**11.23.** На одной стороне острого угла даны точки  $A$  и  $B$ . Постройте на другой его стороне точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

**11.24.** Дан угол  $XAY$  и точка  $O$  внутри его. Проведите через точку  $O$  прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

**11.25.** Проведите через данную точку  $P$ , лежащую внутри угла  $AOB$ , прямую  $MN$  так, чтобы величина  $OM + ON$  была минимальной (точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $OA$  и  $OB$ ).

**11.26.** Даны угол  $XAY$  и окружность внутри его. Постройте точку окружности, сумма расстояний от которой до прямых  $AX$  и  $AY$  минимальна.

**11.27.** Внутри острого угла  $BAC$  дана точка  $M$ . Постройте на сторонах  $BA$  и  $AC$  точки  $X$  и  $Y$  так, чтобы периметр треугольника  $XYM$  был минимальным.

**11.28.** Дан угол  $XAY$ . Концы  $B$  и  $C$  отрезков  $BO$  и  $CO$  длиной 1 перемещаются по лучам  $AX$  и  $AY$ . Постройте четырехугольник  $ABOC$  наибольшей площади.

#### § 4. Четырехугольник

**11.29.** Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей.

**11.30.** Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Какую наименьшую площадь может иметь этот четырехугольник, если площадь треугольника  $AOB$  равна 4, а площадь треугольника  $COD$  равна 9?

**11.31.** Трапеция  $ABCD$  с основанием  $AD$  разрезана диагональю  $AC$  на два треугольника. Прямая  $l$ , параллельная основанию, разрезает эти треугольники на два треугольника и два четырехугольника. При каком положении прямой  $l$  сумма площадей полученных треугольников минимальна?

**11.32.** Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь наибольшая диагональ этой трапеции?

**11.33.** На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  дана точка  $K$ . Найдите на основании  $BC$  точку  $M$ , для которой площадь общей части треугольников  $AMD$  и  $BKC$  максимальна.

**11.34.** Докажите, что среди всех четырехугольников с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник.

См. также задачи 9.35, 15.3, 6).

#### § 5. Многоугольники

**11.35.** Многоугольник имеет центр симметрии  $O$ . Докажите, что сумма расстояний до вершин минимальна для точки  $O$ .

**11.36.** Среди всех многоугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого максимальна сумма квадратов длин сторон.

**11.37.** Дан выпуклый многоугольник  $A_1 \dots A_n$ . Докажите, что точка многоугольника, для которой максимальна сумма расстояний от нее до всех вершин, является вершиной.

См. также задачу 6.69.

## § 6. Разные задачи

**11.38.** Внутри окружности с центром  $O$  дана точка  $A$ . Найдите точку  $M$  окружности, для которой угол  $OMA$  максимален.

**11.39.** На плоскости даны прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$ , лежащие по разные стороны от нее. Постройте окружность, проходящую через точки  $A$  и  $B$  так, чтобы прямая  $l$  высекала на ней хорду наименьшей длины.

**11.40.** Даны прямая  $l$  и точки  $P$  и  $Q$ , лежащие по одну сторону от нее. На прямой  $l$  берем точку  $M$  и в треугольнике  $PQM$  проводим высоты  $PP'$  и  $QQ'$ . При каком положении точки  $M$  длина отрезка  $P'Q'$  минимальна?

**11.41.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $O$  не лежат на одной прямой. Проведите через точку  $O$  прямую  $l$  так, чтобы сумма расстояний от нее до точек  $A$  и  $B$  была: а) наибольшей; б) наименьшей.

\* \* \*

**11.42.** Если на плоскости заданы пять точек, то, рассматривая всевозможные тройки этих точек, можно образовать 30 углов. Обозначим наименьший из этих углов  $\alpha$ . Найдите наибольшее значение  $\alpha$ .

**11.43.** В городе 10 улиц, параллельных друг другу, и 10 улиц, пересекающих их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый автобусный маршрут, проходящий через все перекрестки?

**11.44.** Чему равно наибольшее число клеток шахматной доски размером  $8 \times 8$ , которые можно пересечь одной прямой? («Пересечение» имеет общую внутреннюю точку.)

**11.45.** Какое наибольшее число точек можно поместить на отрезке длиной 1 так, чтобы на любом отрезке длиной  $d$ , содержащемся в этом отрезке, лежало не больше  $1 + 1000d^2$  точек?

См. также задачи 15.1, 17.20.

## § 7. Экстремальные свойства правильных многоугольников

**11.46.** а) Докажите, что среди всех  $n$ -угольников, описанных около данной окружности, наименьшую площадь имеет правильный  $n$ -угольник.

б) Докажите, что среди всех  $n$ -угольников, описанных около данной окружности, наименьший периметр имеет правильный  $n$ -угольник.

**11.47.** Треугольники  $ABC_1$  и  $ABC_2$  имеют общее основание  $AB$  и  $\angle AC_1B = \angle AC_2B$ . Докажите, что если  $|AC_1 - C_1B| < |AC_2 - C_2B|$ , то:

а) площадь треугольника  $ABC_1$  больше площади треугольника  $ABC_2$ ;

б) периметр треугольника  $ABC_1$  больше периметра треугольника  $ABC_2$ .

**11.48.** а) Докажите, что среди всех  $n$ -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный  $n$ -угольник.

б) Докажите, что среди всех  $n$ -угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный  $n$ -угольник.

### Задачи для самостоятельного решения

**11.49.** На стороне острого угла с вершиной  $A$  дана точка  $B$ . Постройте на другой его стороне такую точку  $X$ , что радиус описанной окружности треугольника  $ABX$  наименьший.

**11.50.** Через данную точку внутри окружности проведите хорду наименьшей длины.

**11.51.** Среди всех треугольников с заданной суммой длин биссектрис найдите треугольник с наибольшей суммой длин высот.

**11.52.** Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин наименьшая.

**11.53.** Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, для которого величина  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  наименьшая.

**11.54.** На шахматной доске с обычной раскраской проведите окружность наибольшего радиуса так, чтобы она не пересекала ни одного белого поля.

**11.55.** Внутри квадрата дана точка  $O$ . Любая прямая, проходящая через  $O$ , разрезает квадрат на две части.



Проведите через точку  $O$  прямую так, чтобы разность площадей этих частей была наибольшей.

**11.56.** Какую наибольшую длину может иметь наименьшая сторона треугольника, вписанного в данный квадрат?

**11.57.** Какую наибольшую площадь может иметь правильный треугольник, вписанный в данный квадрат?

## Решения

**11.1.** По теореме косинусов  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha) = (b-c)^2 + 4S(1 - \cos \alpha)/\sin \alpha$ . Так как второе слагаемое постоянно, то  $a$  минимально, если  $b=c$ .

**11.2.** Пусть внеписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$ . Так как  $AK=AL=p$ , то внеписанная окружность  $S_a$  фиксирована. Радиус  $r$  вписанной окружности максимален, когда она касается окружности  $S_a$ , т. е. треугольник  $ABC$  равнобедренный. Ясно также, что  $S=pr$ .

**11.3.** Согласно задаче 10.53,а)  $S \leq p^2/3 \sqrt{3}$ , причем равенство достигается только для правильного треугольника.

**11.4.** По теореме косинусов  $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos \alpha$ . Так как  $2bc \leq b^2 + c^2$  и  $\cos \alpha > 0$ , то  $b^2 + c^2 \leq a^2 + (b^2 + c^2) \cos \alpha$ , т. е.  $b^2 + c^2 \leq a^2/(1 - \cos \alpha)$ . Равенство достигается, если  $b=c$ .

**11.5.** Пусть  $O$  — центр окружности радиуса  $R$ ;  $A, B$  и  $C$  — вершины треугольника;  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$ . Тогда  $AB^2 + BC^2 + CA^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - 2(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{b}, \vec{c}) - 2(\vec{c}, \vec{a})$ . Так как  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a})$ , то  $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \leq 3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) = 9R^2$ , причем равенство достигается, только если  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ . Это равенство означает, что треугольник  $ABC$  правильный.

**11.6.** Обозначим длину высоты, опущенной на сторону  $BC$ , через  $h$ . Так как  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ , то  $MN/BC = (h-2r)/h$ , т. е.  $MN = a \left(1 - \frac{2r}{h}\right)$ .

Поскольку  $r = S/p = ah/2p$ , то  $MN = a(1 - a/p)$ . Максимум выражения  $a(1 - a/p) = a(p - a)/p$  достигается при  $a = p/2$ ; он равен  $p/4$ . Остается заметить, что существует треугольник периметра  $2p$  со стороной  $a = p/2$  (положим  $b = c = 3p/4$ ).

**11.7.** Пусть  $O$  — центр симметрии многоугольника  $M$ , расположенного внутри треугольника  $T$ ,  $S(T)$  — образ треугольника  $T$  при симметрии относительно точки  $O$ . Тогда  $M$  лежит и в  $T$ , и в  $S(T)$ . Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в  $T$ , наибольшую площадь имеет пересечение  $T$  и  $S(T)$ . Точка  $O$  лежит внутри треугольника  $T$ , так как пересечением  $T$  и  $S(T)$  является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии.

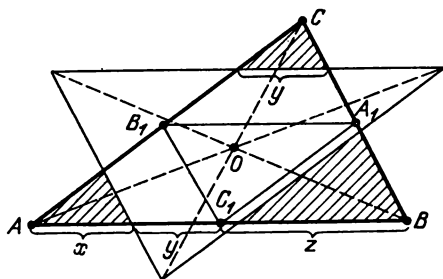


Рис. 124

Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $T=ABC$ . Предположим сначала, что точка  $O$  лежит внутри треугольника  $A_1B_1C_1$ . Тогда пересечением  $T$  и  $S(T)$  является шестиугольник (рис. 124). Пусть сторона  $AB$  делится сторонами треугольника  $S(T)$  в отношении  $x:y:z$ , где  $x+y+z=1$ . Тогда отношение суммы площадей заштрихованных треугольников к площади треугольника  $ABC$  равно  $x^2+y^2+z^2$ ; нужно минимизировать это выражение. Так как  $1=(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2)-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2$ , то  $x^2+y^2+z^2 \geq 1/3$ , причем равенство достигается только при  $x=y=z$ ; последнее равенство означает, что  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

Рассмотрим теперь другой случай: точка  $O$  лежит внутри одного из треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ , например внутри  $\triangle AB_1C_1$ . В этом случае пересечением  $T$  и  $S(T)$  является параллелограмм, причем если мы заменим точку  $O$  точкой пересечения прямых  $AO$  и  $B_1C_1$ , то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка  $O$  лежит на стороне  $B_1C_1$ , то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить  $x=0$ ).

Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна  $2/3$  площади треугольника.

**11.8.** Обозначим точку пересечения прямых  $KM$  и  $BC$  через  $T$ , а точки пересечения сторон треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $KLM$  так, как показано на рис. 125. Тогда  $TL:RZ=KL:KZ=LC:ZB_1$ . Так как  $TL \geq BA_1 = A_1C \geq LC$ , то  $RZ \geq ZB_1$ , т. е.  $S_{RZQ} \geq S_{ZB_1Q}$ . Аналогично  $S_{QYP} \geq S_{YA_1P}$ .

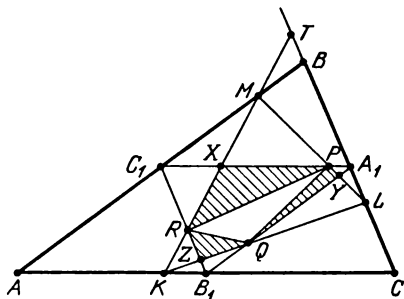


Рис. 125

и  $S_{PXR} \geq S_{XC_1R}$ . Складывая все эти неравенства и неравенство  $S_{PQR} > 0$ , получаем, что площадь шестиугольника  $PXRZQY$  не меньше площади оставшейся части треугольника  $A_1B_1C_1$ , т. е. его площадь не меньше  $S_{A_1B_1C_1}/2 = 1/8$ . Равенство достигается, например, если точка  $K$  совпадает с  $B_1$ , а точка  $M$  — с  $B$ .

**11.9.** Так как площадь правильного треугольника со стороной  $a$  равна  $a^2\sqrt{3}/4$ , сторона правильного треугольника площадью 1 равна  $2/\sqrt[4]{3}$ , а его высота  $\sqrt[4]{3}$ . Докажем, что из полосы шириной меньше  $\sqrt[4]{3}$  нельзя вырезать правильный треугольник площадью 1. Пусть правильный треугольник  $ABC$  лежит внутри полосы шириной меньше  $\sqrt[4]{3}$ . Пусть для определенности проекция вершины  $B$  на границу полосы лежит между проекциями вершин  $A$  и  $C$ . Тогда прямая, проведенная через точку  $B$  перпендикулярно границе полосы, пересекает отрезок  $AC$  в некоторой точке  $M$ . Высота треугольника  $ABC$  не превосходит  $BM$ , а  $BM$  не больше ширины полосы, поэтому высота треугольника  $ABC$  меньше  $\sqrt[4]{3}$ , т. е. его площадь меньше 1.

Остается доказать, что из полосы шириной  $\sqrt[4]{3}$  можно вырезать любой треугольник площадью 1. Докажем, что у любого треугольника площадью 1 есть высота, не превосходящая  $\sqrt[4]{3}$ . Для этого достаточно доказать, что у него есть сторона не меньше  $2/\sqrt[4]{3}$ . Предположим, что все стороны треугольника  $ABC$  меньше  $2/\sqrt[4]{3}$ . Пусть  $\alpha$  — наименьший угол этого треугольника. Тогда  $\alpha \leq 60^\circ$  и  $S_{ABC} = (AB \cdot AC \sin \alpha)/2 < (2/\sqrt[4]{3})^2 (\sqrt{3}/4) = 1$ . Получено противоречие. Треугольник, у которого есть высота, не превосходящая  $\sqrt[4]{3}$ , можно поместить в полосу шириной  $\sqrt[4]{3}$ , положив сторону, на которую опущена эта высота, на сторону полосы.

**11.10.** Возведя обе части данного равенства в квадрат, его легко привести к виду

$$(\sqrt{ab_1} - \sqrt{a_1b})^2 + (\sqrt{ca_1} - \sqrt{c_1a})^2 + (\sqrt{bc_1} - \sqrt{cb_1})^2 = 0,$$

т. е.  $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$ .

**11.11.** Фиксируем углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Пусть  $A_1B_1C_1$  — треугольник с углами  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\gamma_1$ . Рассмотрим векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , сонаправленные с векторами  $\vec{B_1C_1}$ ,  $\vec{C_1A_1}$  и  $\vec{A_1B_1}$  и имеющие длины  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  и  $\sin \gamma$ . Тогда  $\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} = -[(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})]/(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)$ . А так как  $2[(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})] = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$ , то величина  $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$  минимальна, когда  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ , т. е.  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta$  и  $\gamma_1 = \gamma$ .

**11.12.** Пусть  $x = \operatorname{ctg} \alpha_1$  и  $y = \operatorname{ctg} \beta_1$ . Тогда  $x + y > 0$  (так как  $\alpha_1 + \beta_1 < \pi$ ) и  $\operatorname{ctg} \gamma_1 = (1 - xy)/(x + y) = (x^2 + 1)/(x + y) - x$ . Поэтому  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha_1 + b^2 \operatorname{ctg} \beta_1 + c^2 \operatorname{ctg} \gamma_1 = (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2(x + y) +$

$+c^2(x^2+1)/(x+y)$ . При фиксированном  $x$  это выражение минимально при таком  $y$ , что  $b^2(x+y)=c^2(x^2+1)/(x+y)$ , т. е.  $c/b=(x+y)/\sqrt{1+x^2}=\sin\alpha_1(\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\beta_1)=\sin\gamma_1/\sin\beta_1$ . Аналогичные рассуждения показывают, что если  $a:b:c=\sin\alpha_1:\sin\beta_1:\sin\gamma_1$ , то рассматриваемое выражение минимально. В этом случае треугольники подобны и  $a^2\operatorname{ctg}\alpha+b^2\operatorname{ctg}\beta+c^2\operatorname{ctg}\gamma=4S$  (см. задачу 12.44, б).

**11.13.** Пусть  $f=bc\cos x+ca\cos y+ab\cos z$ . Так как  $\cos x=-\cos y\cos z+\sin y\sin z$ , то  $f=c(a-b\cos z)\cos y+bc\sin y\sin z+ab\cos z$ . Рассмотрим треугольник, длины двух сторон которого равны  $a$  и  $b$ , а угол между ними равен  $z$ ; пусть  $\xi$  и  $\eta$  — углы, лежащие против сторон  $a$  и  $b$ ,  $t$  — длина стороны, лежащей против угла  $z$ . Тогда  $\cos z=(a^2+b^2-t^2)/2ab$  и  $\cos\eta=(t^2+a^2-b^2)/2at$ , поэтому  $(a-b\cos z)/t=\cos\eta$ . Кроме того,  $b/t=\sin\eta/\sin z$ . Следовательно,  $f=ct\cos(\eta-y)+(a^2+b^2-t^2)/2$ .

Так как  $\cos(\eta-y)\leq 1$ , то  $f\leq \frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}-\frac{(c-t)^2}{2}\leq (a^2+b^2+c^2)/2$ .

Так как  $a\geq b$ , то  $\xi\geq\eta$ , а значит,  $-\xi\leq-\eta<y-\eta<\pi-z-\eta=\xi$ , т. е.  $\cos(y-\eta)>\cos\xi$ . Поэтому

$$f>ct\cos\xi+\frac{a^2+b^2-t^2}{2}=\frac{c-b}{2b}t^2+\frac{c(b^2-a^2)}{2b}+\frac{a^2+b^2}{2}=g(t).$$

Коэффициент при  $t^2$  отрицателен или равен нулю; кроме того,  $t<a+b$ . Следовательно,  $g(t)\geq g(a+b)=bc+ca-ab$ .

**11.14.** а) Так как  $CMXN$  — прямоугольник, то  $MN=CX$ . Поэтому длина отрезка  $MN$  будет наименьшей, если  $CX$  — высота.

б) Пусть  $S_{ABC}=S$ . Тогда  $S_{AMX}=AX^2\cdot S/AB^2$  и  $S_{BNX}=BX^2\cdot S/AB^2$ . Поскольку  $AX^2+BX^2\geq AB^2/2$  (причем равенство достигается, только если  $X$  — середина отрезка  $AB$ ), то  $S_{CMXN}=S-S_{AMX}-S_{BNX}\leq S/2$ . Площадь четырехугольника  $CMXN$  будет наибольшей, если  $X$  — середина стороны  $AB$ .

**11.15.** Точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности, построенной на отрезке  $CM$  как на диаметре. В этой окружности постоянный угол  $C$  опирается на хорду  $PQ$ , поэтому длина хорды  $PQ$  будет минимальна, если минимален диаметр  $CM$  окружности, т. е.  $CM$  — высота треугольника  $ABC$ .

**11.16.** По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников  $ACM$  и  $BCM$  равны  $AC/(2\sin\angle AMC)$  и  $BC/(2\sin\angle BMC)$  соответственно. Легко проверить, что  $\sin\angle AMC=\sin\angle BMC$ . Поэтому  $AC/(2\sin\angle AMC)+BC/(2\sin\angle BMC)=(AC+BC)/(2\sin\angle BMC)$ . Последнее выражение будет наименьшим, если  $\sin\angle BMC=1$ , т. е.  $CM\perp AB$ .

**11.17.** Точки  $P$  и  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $AM$ , поэтому  $PQ=AM\sin\angle PAQ=AM\sin A$ . Значит, длина отрезка  $PQ$  максимальна, когда  $AM$  — диаметр описанной окружности.

**11.18.** Ясно, что  $2S_{ABC}=ad_a+bd_b+cd_c$ . Поэтому произведение  $(ad_a)(bd_b)(cd_c)$  будет наибольшим, если  $ad_a=bd_b=cd_c$  (см. с. 237). Так

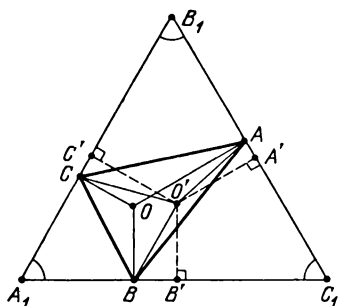


Рис. 126

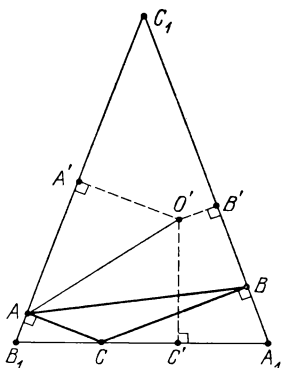


Рис. 127

как величина  $abc$  постоянна, произведение  $(ad_a)(bd_b)(cd_c)$  будет наибольшим тогда и только тогда, когда будет наибольшим произведение  $d_a d_b d_c$ .

Покажем, что равенство  $ad_a = bd_b = cd_c$  означает, что  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Обозначим точку пересечения прямых  $AO$  и  $BC$  через  $A_1$ . Тогда  $BA_1 : A_1C = S_{ABA_1} : S_{ACA_1} = S_{ABO} : S_{ACO} = (cd_c) : (bd_b) = 1$ , т. е.  $AA_1$  — медиана. Аналогично доказывается, что точка  $O$  лежит на медианах  $BB_1$  и  $CC_1$ .

**11.19.** Пусть  $\alpha = MA_1/AA_1$ ,  $\beta = MB_1/BB_1$  и  $\gamma = MC_1/CC_1$ . Так как  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  (см. задачу 4.48, а), то  $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq (\alpha + \beta + \gamma)/3 = 1/3$ , причем равенство достигается, когда  $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ , т. е.  $M$  — точка пересечения медиан.

**11.20.** Пусть  $x = MA_1$ ,  $y = MB_1$  и  $z = MC_1$ . Тогда  $ax + by + cz = 2S_{BMC} + 2S_{AMC} + 2S_{AMB} = 2S_{ABC}$ . Поэтому  $\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot 2S_{ABC} = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + ac\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ , причем равенство достигается, только если  $x = y = z$ , т. е.  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**11.21.** Предположим сначала, что все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ . Тогда внутри него существует точка  $O$ , из которой все стороны видны под углом  $120^\circ$ . Проведем через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  прямые, перпендикулярные отрезкам  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ . Эти прямые образуют правильный треугольник  $A_1B_1C_1$  (рис. 126). Пусть  $O'$  — любая точка, лежащая внутри треугольника  $ABC$  и отличная от точки  $O$ . Докажем, что тогда  $O'A + O'B + O'C > OA + OB + OC$ , т. е.  $O$  — искомая точка. Пусть  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $O'$  на стороны  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$ ,

$a$  — длина стороны правильного треугольника  $A_1B_1C_1$ . Тогда  $O'A' + O'B' + O'C' = 2(S_{O'B_1C_1} + S_{O'A_1B_1} + S_{O'A_1C_1})/a = 2S_{A_1B_1C_1}/a = OA + OB + OC$ . Так как наклонная длиннее перпендикуляра, то  $O'A + OB + O'C > O'A' + O'B' + O'C' = OA + OB + OC$ .

Пусть теперь один из углов треугольника  $ABC$ , например угол  $C$ , больше  $120^\circ$ . Проведем через точки  $A$  и  $B$  перпендикуляры  $B_1C_1$  и  $C_1A_1$  к отрезкам  $CA$  и  $CB$ , а через точку  $C$  — прямую  $A_1B_1$ , перпендикулярную биссектрисе угла  $ACB$  (рис. 127). Так как  $\angle AC_1B = 180^\circ - \angle ACB < 60^\circ$ , то  $B_1C_1 > A_1B_1$ . Пусть  $O'$  — любая точка, лежащая внутри треугольника  $A_1B_1C_1$ . Поскольку  $B_1C_1 \cdot O'A' + C_1A_1 \cdot O'B' + A_1B_1 \cdot O'C' = 2S_{A_1B_1C_1}$ , то  $(O'A' + O'B' + O'C') \cdot B_1C_1 = 2S_{A_1B_1C_1} + (B_1C_1 - A_1B_1) \cdot O'C'$ . Так как  $B_1C_1 > A_1B_1$ , то сумма  $O'A' + O'B' + O'C'$  минимальна для точек, лежащих на стороне  $B_1A_1$ . Ясно также, что  $O'A + OB + O'C \geq O'A' + O'B' + O'C'$ . Следовательно, искомой точкой является вершина  $C$ .

**11.22.** Пусть расстояния от точки  $O$  до сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  равны  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Тогда  $ax + by + cz = 2(S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}) = 2S_{ABC}$ . Ясно также, что  $x:y:z = (S_{BOC}/a):(S_{COA}/b):(S_{AOB}/c)$ .

Уравнение  $ax + by + cz = 2S$  задает плоскость в трехмерном пространстве с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , причем вектор  $(a, b, c)$  перпендикулярен этой плоскости, так как если  $ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S$  и  $ax_2 + by_2 + cz_2 = 2S$ , то  $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0$ . Нам нужно найти точку  $(x_0, y_0, z_0)$  этой плоскости, для которой достигается минимум выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ , и проверить, что этой точке соответствует некоторая внутренняя точка треугольника. Так как  $x^2 + y^2 + z^2$  — это квадрат расстояния от начала координат до точки  $(x, y, z)$ , то искомой точкой является основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, т. е.  $x:y:z = a:b:c$ . Остается проверить, что внутри треугольника существует точка  $O$ , для которой  $x:y:z = a:b:c$ . Это равенство эквивалентно условию

$$(S_{BOC}/a):(S_{COA}/b):(S_{AOB}/c) = a:b:c,$$

т. е.  $S_{BOC}:S_{COA}:S_{AOB} = a^2:b^2:c^2$ . А так как равенство  $S_{BOC}:S_{AOB} = a^2:c^2$  следует из равенств  $S_{BOC}:S_{COA} = a^2:b^2$  и  $S_{COA}:S_{AOB} = b^2:c^2$ , то искомая точка — это точка пересечения прямых  $CC_1$  и  $AA_1$ , делящих стороны  $AB$  и  $BC$  в отношениях  $BC_1:C_1A = a^2:b^2$  и  $CA_1:A_1B = b^2:c^2$  соответственно.

**11.23.** Пусть  $O$  — вершина данного угла. Точка  $C$  является точкой касания стороны угла с окружностью, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , т. е.  $OC^2 = OA \cdot OB$ . Для нахождения длины отрезка  $OC$  достаточно провести касательную к любой окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

**11.24.** Рассмотрим угол  $X'A'Y'$ , симметричный углу  $XAY$  относительно точки  $O$ . Пусть  $B$  и  $C$  — точки пересечения сторон этих углов. Обозначим точки пересечения прямой, проходящей через

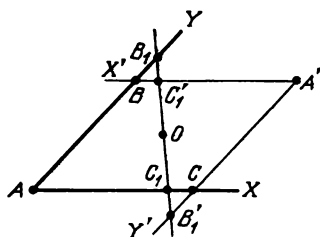


Рис. 128

точку  $O$ , со сторонами углов  $XAY$  и  $X'A'Y'$  через  $B_1$ ,  $C_1$  и  $B'_1$ ,  $C'_1$  соответственно (рис. 128). Так как  $S_{AB_1C_1} = S_{A'B'_1C'_1}$ , то  $S_{AB_1C_1} = (S_{ABA'C} + S_{BB_1C_1} + S_{CC_1B_1})/2$ . Площадь треугольника  $AB_1C_1$  минимальна, если  $B_1=B$  и  $C_1=C$ , т. е. искомой прямой является  $BC$ .

**11.25.** Возьмем на сторонах  $OA$  и  $OB$  точки  $K$  и  $L$  так, что  $KP \parallel OB$  и  $LP \parallel OA$ . Тогда

$KM:KP=PL:LN$ , а значит,  $KM+LN \geq 2\sqrt{KM \cdot LN} = 2\sqrt{KP \cdot PL} = 2\sqrt{OK \cdot OL}$ , причем равенство достигается, когда  $KM=LN=\sqrt{OK \cdot OL}$ . Ясно также, что  $OM+ON=(OK+OL)+(KM+LN)$ .

**11.26.** Отложим на лучах  $AX$  и  $AY$  равные отрезки  $AB$  и  $AC$ . Если точка  $M$  лежит на отрезке  $BC$ , то сумма расстояний от нее до прямых  $AB$  и  $AC$  равна  $2(S_{ABM} + S_{ACM})/AB = 2S_{ABC}/AB$ . Поэтому сумма расстояний от точки до прямых  $AX$  и  $AY$  тем меньше, чем меньше расстояние от ее проекции на биссектрису угла  $XAY$  до точки  $A$ .

**11.27.** Пусть точки  $M_1$  и  $M_2$  симметричны  $M$  относительно прямых  $AB$  и  $AC$ . Так как  $\angle BAM_1 = \angle BAM$  и  $\angle CAM_2 = \angle CAM$ , то  $\angle M_1AM_2 = 2\angle BAC < 180^\circ$ . Поэтому отрезок  $M_1M_2$  пересекает лучи  $AB$  и  $AC$  в некоторых точках  $X$  и  $Y$  (рис. 129). Докажем, что  $X$  и  $Y$  — искомые точки. В самом деле, если точки  $X_1$  и  $Y_1$  лежат на лучах  $AB$  и  $AC$ , то  $MX_1 = M_1X_1$  и  $MY_1 = M_2Y_1$ , т. е. периметр треугольника  $MX_1Y_1$  равен длине ломаной  $M_1X_1Y_1M_2$ . Из всех ломаных с концами в точках  $M_1$  и  $M_2$  наименьшую длину имеет отрезок  $M_1M_2$ .

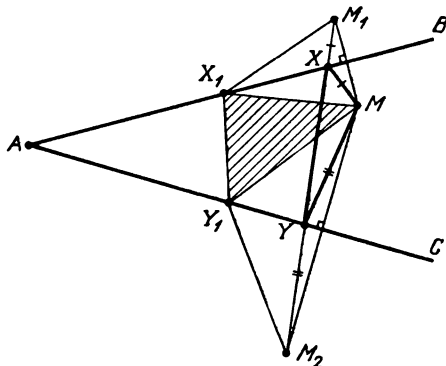


Рис. 129

**11.28.** Четырехугольник  $ABOC$  наибольшей площади выпуклый. Среди всех треугольников  $ABC$  с фиксированным углом  $A$  и стороной  $BC$  наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием  $BC$ . Значит, среди всех рассматриваемых четырехугольников  $ABOC$  с фиксированной диагональю  $BC$  наибольшую площадь имеет четырехугольник, для которого  $AB=AC$ , т. е. точка  $O$  лежит на биссектрисе угла  $A$ . Рассмотрим, далее, треугольник  $ABO$ , в котором фиксированы угол  $BAO$ , равный  $\angle A/2$ , и сторона  $BO$ . Площадь этого треугольника максимальна, когда  $AB=AO$ .

**11.29.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , а  $O_1$  — любая другая точка. Тогда  $AO_1 + CO_1 \geq AC = AO + CO$  и  $BO_1 + DO_1 \geq BD = BO + DO$ , причем хотя бы одно из неравенств строгое. Следовательно,  $O$  — искомая точка.

**11.30.** Так как  $S_{AOB} : S_{BOC} = AO : OC = S_{AOD} : S_{DOC}$ , то  $S_{BOC} \cdot S_{AOD} = S_{AOB} \cdot S_{DOC} = 36$ . Следовательно,  $S_{BOC} + S_{AOD} \geq 2\sqrt{S_{BOC} \cdot S_{AOD}} = 12$ , причем равенство достигается, если  $S_{BOC} = S_{AOD}$ , т. е.  $S_{ABC} = S_{ABD}$ , откуда  $AB \parallel CD$ . При этом площадь четырехугольника равна  $4 + 9 + 12 = 25$ .

**11.31.** Пусть  $S_0$  и  $S$  — рассматриваемые суммы площадей треугольников для прямой  $l_0$ , проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции, и для некоторой другой прямой  $l$ . Легко проверить, что  $S = S_0 + s$ , где  $s$  — площадь треугольника, образованного диагоналями  $AC$  и  $BD$  и прямой  $l$ . Поэтому  $l_0$  — искомая прямая.

**11.32.** Длины диагоналей трапеции обозначим через  $d_1$  и  $d_2$ , длины их проекции на основание — через  $p_1$  и  $p_2$ , длины оснований —

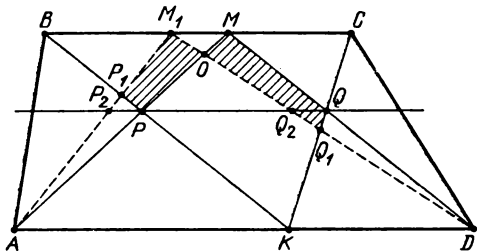


Рис. 130

через  $a$  и  $b$ , высоту — через  $h$ . Пусть для определенности  $d_1 \geq d_2$ . Тогда  $p_1 \geq p_2$ . Ясно, что  $p_1 + p_2 \geq a + b$ . Поэтому  $p_1 \geq (a + b)/2 = S/h = 1/h$ . Следовательно,  $d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$ , причем равенст-

во достигается, только если  $p_1 = p_2 = h = 1$ . При этом  $d_1 = \sqrt{2}$ .

**11.33.** Докажем, что искомой точкой является точка  $M$ , делящая сторону  $BC$  в отношении  $BM : MC = AK : KD$ . Обозначим точки



пересечения отрезков  $AM$  и  $BK$ ,  $DM$  и  $CK$  через  $P$ ,  $Q$  соответственно. Тогда  $KQ:QC=KD:MC=KA:MB=KP:PB$ , т. е. прямая  $PQ$  параллельна основаниям трапеции.

Пусть  $M_1$  — любая другая точка на стороне  $BC$ . Для определенности можно считать, что  $M_1$  лежит на отрезке  $BM$ . Обозначим точки пересечения  $AM_1$  и  $BK$ ,  $DM_1$  и  $CK$ ,  $AM_1$  и  $PQ$ ,  $DM_1$  и  $PQ$ ,  $AM$  и  $DM_1$  через  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_2$ ,  $O$  соответственно (рис. 130). Нужно доказать, что  $S_{MPKQ} > S_{M_1P_1KQ_1}$ , т. е.  $S_{MOQ_1Q} > S_{M_1OPP_1}$ . Ясно, что  $S_{MOQ_1Q} > S_{MOQ_2Q} = S_{M_1OPP_2} > S_{M_1OPP_1}$ .

**11.34.** Согласно задаче 4.45,а)

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2((B+D)/2).$$

Эта величина максимальна, когда  $\cos((B+D)/2) = 0$ , т. е.  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ .

**11.35.** Если  $A$  и  $A'$  — симметричные относительно точки  $O$  вершины многоугольника, то сумма расстояний до точек  $A$  и  $A'$  одна и та же для всех точек отрезка  $AA'$ , а для всех других точек она больше. Точка  $O$  принадлежит всем таким отрезкам.

**11.36.** Если в треугольнике  $ABC$  угол  $B$  тупой или прямой, то по теореме косинусов  $AC^2 \geq AB^2 + BC^2$ . Поэтому если в многоугольнике угол при вершине  $B$  не острый, то, выбросив вершину  $B$ , получим многоугольник с не меньшей суммой квадратов длин сторон. Так как у любого  $n$ -угольника при  $n \geq 3$  есть неострый угол, с помощью такой операции мы приходим к треугольнику. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую сумму квадратов длин сторон имеет правильный треугольник (см. задачу 11.5).

**11.37.** Если точка  $X$  делит некоторый отрезок  $PQ$  в отношении  $\lambda:(1-\lambda)$ , то  $A_iX = (1-\lambda)A_iP + \lambda A_iQ$ , а значит,  $A_iX \leq (1-\lambda)A_iP + \lambda A_iQ$ . Следовательно,  $f(X) = \sum A_iX \leq (1-\lambda) \sum A_iP + \lambda \sum A_iQ = (1-\lambda)f(P) + \lambda f(Q)$ . Пусть, например,  $f(P) \leq f(Q)$ ; тогда  $f(X) \leq f(Q)$ . Поэтому функция  $f$  на отрезке  $PQ$  принимает максимальное значение в одном из его концов; точнее говоря, внутри отрезка не может быть точки строгого максимума функции  $f$ . Следовательно, если  $X$  — любая точка многоугольника, то  $f(X) \leq f(Y)$ , где  $Y$  — некоторая точка стороны многоугольника, а  $f(Y) \leq f(Z)$ , где  $Z$  — некоторая вершина.

**11.38.** Геометрическое место точек  $X$ , для которых угол  $OXA$  постоянен, состоит из двух симметричных относительно прямой  $OA$  дуг окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Рассмотрим тот случай, когда диаметр окружностей  $S_1$  и  $S_2$  равен радиусу исходной окружности, т. е. эти окружности касаются исходной окружности в точках  $M_1$  и  $M_2$ , для которых  $\angle OAM_1 = \angle OAM_2 = 90^\circ$ . Точки  $M_1$  и  $M_2$  являются искомыми, так как если  $\angle OXA > \angle OM_1A = \angle OM_2A$ , то точка  $X$  лежит строго внутри фигуры, образованной окружностями  $S_1$  и  $S_2$ , т. е. не может лежать на исходной окружности.

**11.39.** Обозначим точку пересечения прямой  $l$  и отрезка  $AB$  через  $O$ . Рассмотрим произвольную окружность  $S$ , проходящую через точки  $A$  и  $B$ . Она пересекает  $l$  в некоторых точках  $M$  и  $N$ . Поскольку  $MO \cdot NO = AO \cdot BO$  — постоянная величина, то

$$MN = MO + NO \geq 2 \sqrt{MO \cdot NO} = 2 \sqrt{AO \cdot BO},$$

причем равенство достигается, только если  $MO = NO$ . В этом случае центр окружности  $S$  является точкой пересечения серединного перпендикуляра к  $AB$  и перпендикуляра к  $l$ , проходящего через точку  $O$ .

**11.40.** Построим окружность с диаметром  $PQ$ . Если эта окружность пересекается с прямой  $l$ , то любая из точек пересечения является искомой, поскольку в этом случае  $P' = Q'$ . Если же окружность не пересекается с прямой  $l$ , то для любой точки  $M$  на прямой  $l$  угол  $PMQ$  острый и  $\angle P'PQ' = 90^\circ \pm \angle PMQ$ . Теперь легко убедиться, что длина хорды  $P'Q'$  минимальна, если угол  $PMQ$  максимален. Для нахождения точки  $M$  остается провести через точки  $P$  и  $Q$  окружности, касающиеся прямой  $l$  (см. задачу 8.56,а), и из точек касания выбрать нужную.

**11.41.** Пусть сумма расстояний от точек  $A$  и  $B$  до прямой  $l$  равна  $2h$ . Если прямая  $l$  пересекает отрезок  $AB$  в точке  $X$ , то  $S_{AOB} = h \cdot OX$ , поэтому величина  $h$  экстремальна, когда экстремальна величина  $OX$ , т. е. прямая  $OX$  соответствует стороне или высоте треугольника  $AOB$ . Если прямая  $l$  не пересекает отрезок  $AB$ , то величина  $h$  равна средней линии трапеции, ограниченной перпендикулярами, опущенными из точек  $A$  и  $B$  на прямую  $l$ . Эта величина экстремальна, когда прямая  $l$  перпендикулярна медиане  $OM$  треугольника  $AOB$  или соответствует стороне треугольника  $AOB$ . Остается выбрать две из полученных четырех прямых.

**11.42.** Предположим сначала, что точки являются вершинами выпуклого пятиугольника. Сумма углов пятиугольника равна  $540^\circ$ , поэтому один из его углов не превосходит  $540^\circ/5 = 108^\circ$ . Диагонали делят этот угол на три угла, поэтому один из них не превосходит  $108^\circ/3 = 36^\circ$ . В этом случае  $\alpha \leq 36^\circ$ .

Если точки не являются вершинами выпуклого пятиугольника, то одна из них лежит внутри треугольника, образованного тремя другими. Один из углов этого треугольника не превосходит  $60^\circ$ . Отрезок, соединяющий соответствующую вершину с внутренней точкой, делит этот угол на два угла, поэтому один из них не превосходит  $30^\circ$ . В этом случае  $\alpha \leq 30^\circ$ . Во всех случаях  $\alpha \leq 36^\circ$ . Ясно, что для правильного пятиугольника  $\alpha = 36^\circ$ .

**11.43.** Замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки, может иметь 20 поворотов (рис. 131). Остается доказать, что меньше 20 поворотов такой маршрут иметь не может. После каждого поворота происходит переход с горизонтальной улицы

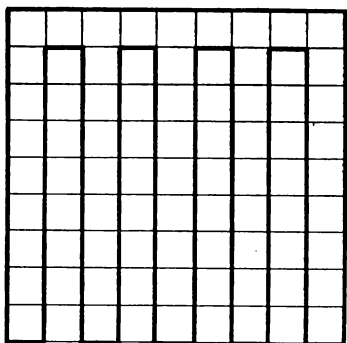


Рис. 131

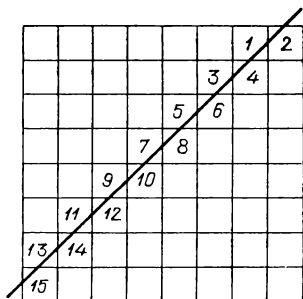


Рис. 132

на вертикальную или с вертикальной на горизонтальную. Поэтому число горизонтальных звеньев замкнутого маршрута равно числу вертикальных звеньев и равно половине числа поворотов. Предположим, что замкнутый маршрут имеет меньше 20 поворотов. Тогда найдутся улицы обоих направлений, по которым маршрут не проходит. Поэтому маршрут не проходит через перекресток этих улиц.

**11.44.** Прямая может пересекать 15 клеток (рис. 132). Докажем теперь, что прямая не может пересекать более 15 клеток. Число клеток, которые пересекает прямая, на 1 меньше числа точек пересечения ее с отрезками, задающими стороны клеток. Внутри квадрата имеется 14 таких отрезков. Поэтому внутри квадрата находится не более 14 точек пересечения прямой со сторонами клеток. Никакая прямая не может пересекать границу доски более чем в двух точках, поэтому число точек пересечения ее с отрезками не превышает 16. Следовательно, наибольшее число клеток шахматной доски размером  $8 \times 8$ , которые можно пересечь одной прямой, равно 15.

**11.45.** Докажем сначала, что 33 точки разместить таким образом нельзя. Действительно, если на отрезке длиной 1 находятся 33 точки, то расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит  $1/32$ . Отрезок с концами в этих точках содержит две точки, а он должен содержать не более  $1 + 1000/32^2$  точек, т. е. менее двух точек.

Докажем теперь, что 32 точки разместить можно. Возьмем 32 точки, делящие отрезок на равные части (концы данного отрезка входят в число этих 32 точек). Тогда отрезок длиной  $d$  содержит либо  $[31d]$ , либо  $[31d] + 1$  точек. Нужно доказать, что  $[31d] \leq 1000d^2$ . Если  $31d < 1$ , то  $[31d] = 0 < 1000d^2$ . Если  $31d \geq 1$ , то  $[31d] \leq 31d \leq (31d)^2 = 961d^2 < 1000d^2$ .

Примечание.  $[x]$  — целая часть числа  $x$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**11.46.** а) Пусть неправильный  $n$ -угольник описан около окружности  $S$ . Опишем около этой окружности правильный  $n$ -угольник, а около него опишем окружность  $S_1$  (рис. 133). Докажем, что площадь части неправильного  $n$ -угольника, заключенной внутри  $S_1$ , больше площади правильного  $n$ -угольника. Все касательные к  $S$  отсекают от  $S_1$  равные сегменты. Поэтому сумма площадей сегментов, отсекаемых от  $S_1$  сторонами правильного  $n$ -угольника, равна сумме площадей сегментов, отсекаемых от  $S_1$  сторонами неправильного  $n$ -угольника или их продолжениями. Но

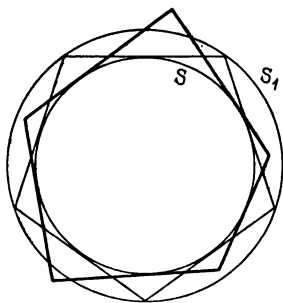


Рис. 133

для правильного  $n$ -угольника эти сегменты не пересекаются (точнее говоря, не имеют общих внутренних точек), а для неправильного  $n$ -угольника некоторые из них обязательно перекрываются, поэтому площадь объединения этих сегментов для правильного  $n$ -угольника больше, чем для неправильного. Следовательно, площадь части неправильного  $n$ -угольника, заключенной внутри окружности  $S_1$ , больше площади правильного  $n$ -угольника, а площадь всего неправильного  $n$ -угольника и подавно больше площади правильного.

б) Эта задача следует из а), так как периметр многоугольника, описанного около окружности радиуса  $R$ , равен  $2S/R$ , где  $S$  — площадь многоугольника.

**11.47.** Стороны треугольника  $ABC$  пропорциональны  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  и  $\sin \gamma$ . Если угол  $\gamma$  фиксирован, то величина  $|\sin \alpha - \sin \beta| = 2|\sin((\alpha - \beta)/2) \sin(\gamma/2)|$  тем больше, чем больше величина  $\varphi = |\alpha - \beta|$ . Остается заметить, что величины  $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = R^2 \sin \gamma (\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma) = R^2 \sin \gamma (\cos \varphi + \cos \gamma)$  и  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos(\gamma/2) \cos(\varphi/2)$  монотонно убывают при возрастании  $\varphi$ .

**11.48.** а) Обозначим длину стороны правильного  $n$ -угольника, вписанного в данную окружность, через  $a_n$ . Рассмотрим произвольный неправильный  $n$ -угольник, вписанный в эту окружность. У него обязательно найдется сторона длиной меньше  $a_n$ . А вот стороны длиной больше  $a_n$  у него может и не быть, но тогда этот многоугольник можно заключить в сегмент, отсекаемый стороной правильного  $n$ -угольника. Так как при симметрии относительно стороны правильного  $n$ -угольника сегмент, отсекаемый этой стороной, попадает внутрь  $n$ -угольника, площадь  $n$ -угольника больше площади сегмента. Поэтому можно считать, что у рассматриваемого  $n$ -угольника есть сторона длиной меньше  $a_n$  и сторона длиной больше  $a_n$ .

Мы можем поменять местами соседние стороны  $n$ -угольника, т. е. вместо многоугольника  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  взять многоугольник

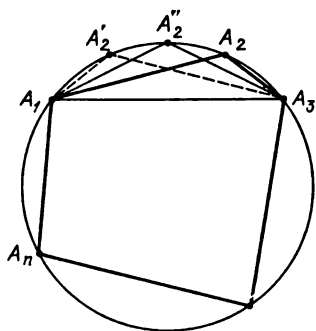


Рис. 134

$A_1 A'_2 A_3 \dots A_n$ , где точка  $A'_2$  симметрична точке  $A_2$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $A_1 A_3$  (рис. 134). При этом оба многоугольника вписаны в одну и ту же окружность и их площади равны. Ясно, что с помощью этой операции можно сделать соседними любые две стороны многоугольника. Поэтому будем считать, что у рассматриваемого  $n$ -угольника  $A_1 A_2 > a_n$  и  $A_2 A_3 < a_n$ . Пусть  $A'_2$  — точка, симметричная точке  $A_2$  относительно серединного перпендикуляра к отрезку

$A_1 A_3$ . Если точка  $A'_2$  лежит на дуге  $A_2 A'_2$ , то разность углов при основании  $A_1 A_3$  у треугольника  $A_1 A'_2 A_3$  меньше, чем у треугольника  $A_1 A_2 A_3$ , так как величины углов  $A_1 A_3 A'_2$  и  $A_3 A_1 A'_2$  заключены между величинами углов  $A_1 A_3 A_2$  и  $A_3 A_1 A_2$ . Поскольку  $A_1 A'_2 < a_n$  и  $A_1 A_2 > a_n$ , то на дуге  $A_2 A'_2$  существует точка  $A'_2$ , для которой  $A_1 A'_2 = a_n$ . Площадь треугольника  $A_1 A'_2 A_3$  больше площади треугольника  $A_1 A_2 A_3$  (см. задачу 11.47, а). Площадь многоугольника  $A_1 A'_2 A_3 \dots A_n$  больше площади исходного многоугольника, и у него по крайней мере на 1 больше число сторон, равных  $a_n$ . За конечное число шагов мы приходим к правильному  $n$ -угольнику, причем каждый раз площадь увеличивается. Следовательно, площадь любого неправильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность, меньше площади правильного  $n$ -угольника, вписанного в ту же окружность.

б) Доказательство аналогично предыдущему, нужно только воспользоваться результатом задачи 11.47, б), а не задачи 11.47, а).

## ВЫЧИСЛЕНИЯ И МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

---

### Вводные задачи

1. Докажите теорему косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A.$$

2. Докажите теорему синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ .

3. Докажите, что площадь треугольника равна  $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где  $p$  — полупериметр (формула Герона).

4. Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , а диагонали равны  $d$  и  $e$ . Докажите, что  $2(a^2 + b^2) = d^2 + e^2$ .

5. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника  $ABCD$  равна  $(1/2)AC \cdot BD \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между диагоналями.

### § 1. Теорема синусов

- 12.1. Докажите, что площадь  $S$  треугольника равна  $abc/4R$ .

- 12.2. Точка  $D$  лежит на основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $CBD$  равны.

- 12.3. Выразите площадь треугольника  $ABC$  через длину стороны  $BC$  и величины углов  $B$  и  $C$ .

- 12.4. Докажите, что  $\frac{a+b}{c} = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} / \sin \frac{\gamma}{2}$  и  $\frac{a-b}{c} = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} / \cos \frac{\gamma}{2}$ .

- 12.5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Точки  $A_2$  и  $C_2$  симметричны  $A_1$  и  $C_1$  относительно середин сторон  $BC$  и  $AB$ . Докажите, что прямая, соединяющая вершину  $B$  с центром  $O$  описанной окружности, делит отрезок  $A_2C_2$  пополам.

- 12.6. Через точку  $S$  проведены прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ ; прямая  $l$  пересекает их в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Докажите, что величина  $AC \cdot BD / (BC \cdot AD)$  не зависит от выбора прямой  $l$ .

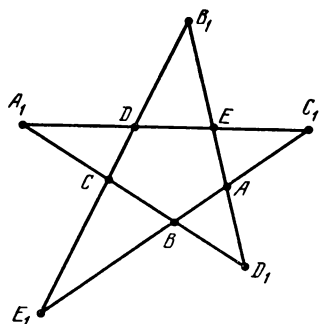


Рис. 135

**12.7.** Даны прямые  $a$  и  $b$ , пересекающиеся в точке  $O$ , и произвольная точка  $P$ . Прямая  $l$ , проходящая через точку  $P$ , пересекает прямые  $a$  и  $b$  в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что величина  $(OA/OB)/(PA/PB)$  не зависит от выбора прямой  $l$ .

**12.8.** Обозначим вершины и точки пересечения звеньев (неправильной) пятиконечной звезды так, как показано на рис. 135. Докажите, что

$$A_1 C \cdot B_1 D \cdot C_1 E \cdot D_1 A \cdot E_1 B = A_1 D \cdot B_1 E \cdot C_1 A \cdot D_1 B \cdot E_1 C.$$

**12.9.** Два подобных равнобедренных треугольника имеют общую вершину. Докажите, что проекции их оснований на прямую, соединяющую середины оснований, равны.

**12.10.** На окружности с диаметром  $AB$  взяты точки  $C$  и  $D$ . Прямая  $CD$  и касательная к окружности в точке  $B$  пересекаются в точке  $X$ . Выразите  $BX$  через радиус окружности  $R$  и углы  $\varphi = \angle BAC$  и  $\psi = \angle BAD$ .

## § 2. Теорема косинусов

**12.11.** Докажите, что:

а)  $m_a^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4$ ;

б)  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)/4$ .

**12.12.** Докажите, что  $4S = (a^2 - (b - c)^2) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ .

**12.13.** Докажите, что  $\cos^2(\alpha/2) = p(p - a)/bc$  и  $\sin^2(\alpha/2) = (p - b)(p - c)/bc$ .

**12.14.** Длины сторон параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , длины диагоналей —  $m$  и  $n$ . Докажите, что  $a^4 + b^4 = m^2 n^2$  тогда и только тогда, когда острый угол параллелограмма равен  $45^\circ$ .

**12.15.** Докажите, что медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $a^2 + b^2 = 5c^2$ .

**12.16.** Пусть  $O$  — центр описанной окружности (неправильного) треугольника  $ABC$ ,  $M$  — точка пересечения медиан. Докажите, что прямая  $OM$  перпендикулярна медиане  $CC_1$  тогда и только тогда, когда  $a^2 + b^2 = 2c^2$ .

### § 3. Вписанная, описанная и внеписанная окружности; их радиусы

12.17. Докажите, что:

а)  $a = r(\operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2)) = r \cos(\alpha/2)/(\sin(\beta/2) \sin(\gamma/2));$

б)  $a = r_a(\operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2)) = r_a \cos(\alpha/2)/(\cos(\beta/2) \cos(\gamma/2));$

в)  $p - b = r \operatorname{ctg}(\beta/2) = r_a \operatorname{tg}(\gamma/2);$

г)  $p = r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2).$

12.18. Докажите, что:

а)  $rp = r_a(p - a), rr_a = (p - b)(p - c)$  и  $r_b r_c = p(p - a);$

б)  $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$  (формула Герона);

в)  $S^2 = rr_a r_b r_c.$

12.19. Докажите, что  $S = r_c^2 \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{ctg}(\gamma/2).$

12.20. Докажите, что  $S = cr_a r_b / (r_a + r_b).$

12.21. Докажите, что  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$

12.22. Докажите, что  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$

12.23. Докажите, что

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{1}{r^2}.$$

12.24. Докажите, что  $r_a + r_b + r_c = 4R + r.$

12.25. Докажите, что  $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2.$

12.26. Докажите, что  $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} = \frac{12R}{S^2}.$

12.27. Докажите, что  $a(b+c) = (r+r_a)(4R+r-r_a)$   
и  $a(b-c) = (r_b-r_c)(4R-r_b-r_c).$

12.28. Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ac} + \frac{OC^2}{ab} = 1.$

12.29. а) Докажите, что если для некоторого треугольника  $p = 2R + r$ , то этот треугольник прямоугольный.

б) Докажите, что если  $p = 2R \sin \varphi + r \operatorname{ctg}(\varphi/2)$ , то  $\varphi$  — один из углов треугольника (предполагается, что  $0 < \varphi < \pi$ ).

### § 4. Длины сторон, высоты, биссектрисы

12.30. Докажите, что  $abc = 4prR$  и  $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR.$

12.31. Докажите, что  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr}.$

12.32. Докажите, что  $\frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right).$



**12.33.** Докажите, что  $h_a = bc/2R$ .

**12.34.** Докажите, что

$$h_a = 2(p-a) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \cos(\alpha/2) = \\ = 2(p-b) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \sin(\alpha/2).$$

**12.35.** Докажите, что длину биссектрисы  $l_a$  можно вычислить по следующим формулам:

а)  $l_a = \sqrt{4p(p-a)bc/(b+c)^2}$ ;

б)  $l_a = 2bc \cos(\alpha/2)/(b+c)$ ;

в)  $l_a = 2R \sin \beta \sin \gamma / \cos((\beta-\gamma)/2)$ ;

г)  $l_a = 4p \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) / (\sin \beta + \sin \gamma)$ .

## § 5. Синусы и косинусы углов треугольника

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника  $ABC$ . В задачах этого параграфа требуется доказать соотношения, указанные в формулировках.

**12.36.** а)  $\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = r/4R$ ;

б)  $\operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{tg}(\gamma/2) = r/p$ ;

в)  $\cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) = p/4R$ .

**12.37.** а)  $\cos(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = (p-a)/4R$ ;

б)  $\sin(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) = r_a/4R$ .

**12.38.**  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (R+r)/R$ .

**12.39.** а)  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 = 0$ ;

б)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ .

**12.40.**  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .

**12.41.** а)  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = (p^2 - r^2 - 4rR)/2R^2$ .

б)  $4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = p^2 - (2R+r)^2$ .

**12.42.**  $ab \cos \gamma + bc \cos \alpha + ca \cos \beta = (a^2 + b^2 + c^2)/2$ .

**12.43.**  $\frac{\cos^2(\alpha/2)}{a} + \frac{\cos^2(\beta/2)}{b} + \frac{\cos^2(\gamma/2)}{c} = \frac{p}{4Rr}$ .

## § 6. Тангенсы и котангенсы углов треугольника

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника  $ABC$ . В задачах этого параграфа требуется доказать соотношения, указанные в формулировках.

**12.44.** а)  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4S$ ;

б)  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma = 4S$ .

**12.45.** а)  $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2) = p/r$ ;

б)  $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2) = \left( \frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} \right) / 2$ .

**12.46.**  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ .

**12.47.**  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$ .

12.48. а)  $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma = 1$ ;

б)  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1/(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)$ .

12.49. Для непрямоугольного треугольника  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = 4S/(a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2)$ .

## § 7. Вычисление углов

12.50. Даны две пересекающиеся окружности радиуса  $R$ , причем расстояние между их центрами больше  $R$ . Докажите, что  $\beta = 3\alpha$  (рис. 136).

12.51. Докажите, что если  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_a}$ , то  $\angle A = 120^\circ$ .

12.52. В треугольнике  $ABC$  высота  $AH$  равна медиане  $BM$ . Найдите угол  $MBC$ .

12.53. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ . Найдите величину угла  $C$ , если известно, что  $AD \cdot BC = BE \cdot AC$  и  $AC \neq BC$ .

12.54. Найдите угол  $B$  треугольника  $ABC$ , если длина высоты  $CH$  равна половине длины стороны  $AB$ , а  $\angle BAC = 75^\circ$ .

12.55. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $A$  на высоте  $AD$  как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $K$  и сторону  $AC$  в точке  $M$ . Отрезки  $AD$  и  $KM$  пересекаются в точке  $L$ . Найдите острые углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AK:AL = AL:AM$ .

12.56. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  вдвое больше угла  $A$  и  $b = 2a$ . Найдите углы этого треугольника.

12.57. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BE$  и на стороне  $BC$  взята точка  $K$  так, что  $\angle AKB = 2\angle AEB$ . Найдите величину угла  $AKE$ , если  $\angle AEB = \alpha$ .

\* \* \*

12.58. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $BC$  угол при вершине  $A$  равен  $80^\circ$ . Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MBC = 30^\circ$  и  $\angle MCB = 10^\circ$ . Найдите величину угла  $AMC$ .

12.59. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  угол при вершине  $B$  равен  $20^\circ$ . На сторонах  $BC$  и  $AB$  взяты точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $\angle DAC = 60^\circ$  и  $\angle ECA = 50^\circ$ . Найдите угол  $ADE$ .

12.60. В остроугольном треугольнике  $ABC$  отрезки  $BO$  и  $CO$ , где  $O$  — центр описанной окружности, продолжены

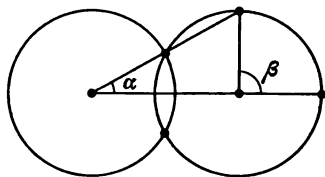


Рис. 136

до пересечения в точках  $D$  и  $E$  со сторонами  $AC$  и  $AB$ . Оказалось, что  $\angle BDE = 50^\circ$  и  $\angle CED = 30^\circ$ . Найдите величины углов треугольника  $ABC$ .

## § 8. Окружности

**12.61.** Окружность  $S$  с центром  $O$  на основании  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  касается равных сторон  $AB$  и  $AC$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $P$  и  $Q$  так, что отрезок  $PQ$  касается окружности  $S$ . Докажите, что тогда  $4PB \cdot CQ = BC^2$ .

**12.62.** Пусть  $E$  — середина стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ , а точки  $F$  и  $G$  выбраны на сторонах  $BC$  и  $CD$  так, что  $AG \parallel EF$ . Докажите, что отрезок  $FG$  касается окружности, вписанной в квадрат  $ABCD$ .

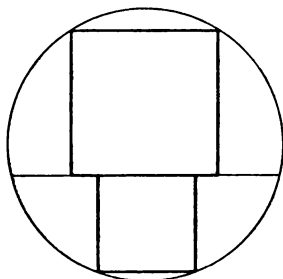


Рис. 137

**12.63.** Хорда окружности удалена от центра на расстояние  $h$ . В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, а две другие — на хорде или ее продолжении (рис. 137). Чему равна разность длин сторон этих квадратов?

**12.64.** Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

\* \* \*

**12.65.** В окружность вписан квадрат, а в сегмент, отсеченный от круга одной из сторон этого квадрата, вписан другой квадрат. Найдите отношение длин сторон этих квадратов.

**12.66.** На отрезке  $AB$  взята точка  $C$  и на отрезках  $AC$ ,  $BC$  и  $AB$  как на диаметрах построены полуокружности,

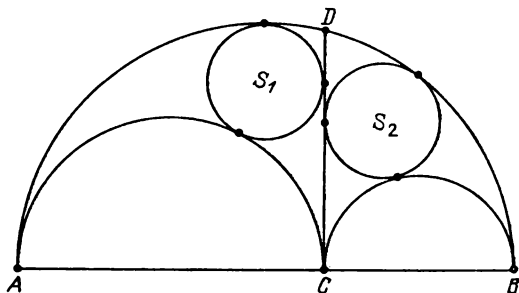


Рис. 138

лежащие по одну сторону от прямой  $AB$ . Через точку  $C$  проведена прямая, перпендикулярная  $AB$ , и в образовавшиеся криволинейные треугольники  $ACD$  и  $BCD$  вписаны окружности  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 138). Докажите, что радиусы этих окружностей равны.

**12.67.** Центры окружностей с радиусами 1, 3 и 4 расположены на сторонах  $AD$  и  $BC$  прямоугольника  $ABCD$ . Эти окружности касаются друг друга и прямых  $AB$  и  $CD$  так, как показано на рис. 139.

Докажите, что существует окружность, касающаяся всех этих окружностей и прямой  $AB$ .

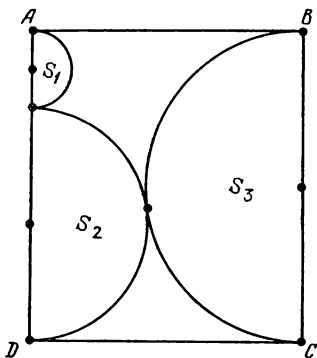


Рис. 139

## § 9. Разные задачи

**12.68.** Найдите все треугольники, у которых углы образуют арифметическую прогрессию, а стороны: а) арифметическую прогрессию; б) геометрическую прогрессию.

**12.69.** Найдите высоту трапеции, у которой основания  $AB$  и  $CD$  равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ), угол между диагоналями равен  $90^\circ$ , а угол между продолжениями боковых сторон равен  $45^\circ$ .

**12.70.** Вписанная окружность касается стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Докажите, что площадь треугольника равна  $BK \cdot KC \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ .

**12.71.** Докажите, что если  $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = (b+c)/a$ , то треугольник прямоугольный.

**12.72.** Продолжения биссектрис треугольника  $ABC$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = 2r/R$ , где  $r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ .

**12.73.** Докажите, что сумма котангенсов углов треугольника  $ABC$  равна сумме котангенсов углов треугольника, составленного из медиан треугольника  $ABC$ .

**12.74.** Пусть  $A_4$  — ортоцентр треугольника  $A_1A_2A_3$ . Докажите, что существуют такие числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ , что  $A_iA_j^2 = \lambda_i + \lambda_j$ , причем, если треугольник не прямоугольный, то  $\sum (1/\lambda_i) = 0$ .

## § 10. Метод координат

**12.75.** Координаты вершин треугольника рациональны. Докажите, что координаты центра его описанной окружности тоже рациональны.

**12.76.** Диаметры  $AB$  и  $CD$  окружности  $S$  перпендикулярны. Хорда  $EA$  пересекает диаметр  $CD$  в точке  $K$ , хорда  $EC$  пересекает диаметр  $AB$  в точке  $L$ . Докажите, что если  $CK:KD=2:1$ , то  $AL:LB=3:1$ .

**12.77.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой. Докажите, что при гомотетии с центром  $C$  и коэффициентом 2 вписанная окружность переходит в окружность, касающуюся описанной окружности.

**12.78.** Квадрат  $ABCD$  вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите геометрическое место середин отрезков  $PQ$ , где  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на неподвижную прямую  $l$ , а  $Q$  — середина стороны  $AB$ .  
См. также задачи 7.6, 7.14, 7.47, 22.15.

### Задачи для самостоятельного решения

**12.79.** Каждая из двух окружностей касается обеих сторон данного прямого угла. Найдите отношение радиусов окружностей, если известно, что одна из них проходит через центр другой.

**12.80.** Пусть продолжения сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ACM$ ,  $BDK$ ,  $ACK$ ,  $BDM$ , связаны соотношением  $R_{ACM} \cdot R_{BDK} = R_{ACK} \cdot R_{BDM}$ .

**12.81.** Три окружности радиусов 1, 2, 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

**12.82.** Пусть точка  $K$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что

$$AC^2 \cdot BK + AB^2 \cdot CK = BC(AK^2 + BK \cdot KC).$$

**12.83.** Докажите, что длина биссектрисы внешнего угла  $A$  треугольника  $ABC$  равна  $\frac{2bc \sin(\alpha/2)}{|b-c|}$ .

**12.84.** Две окружности радиусов  $R$  и  $r$  расположены так, что их общие внутренние касательные перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной.

**12.85.** Докажите, что сумма углов при лучах любой (неправильной) пятиконечной звезды равна  $180^\circ$ .

**12.86.** Докажите, что в любом треугольнике  $S = (p - a)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ .

**12.87.** Пусть  $a < b < c$  — длины сторон треугольника;  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$  и  $l'_a$ ,  $l'_b$ ,  $l'_c$  — длины его биссектрис и биссектрис внешних углов. Докажите, что  $\frac{1}{al_a l'_a} + \frac{1}{cl_c l'_c} = \frac{1}{bl_b l'_b}$ .

**12.88.** В каждый угол треугольника вписана окружность, касающаяся вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если известны радиусы этих окружностей.

**12.89.** Вписанная окружность касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. Докажите, что:

а)  $S = \frac{1}{2} \left( \frac{MK^2}{\sin \alpha} + \frac{KL^2}{\sin \beta} + \frac{LM^2}{\sin \gamma} \right)$ ;

б)  $S^2 = \frac{1}{4} (bcMK^2 + caKL^2 + abLM^2)$ ;

в)  $\frac{MK^2}{h_b h_c} + \frac{KL^2}{h_c h_a} + \frac{LM^2}{h_a h_b} = 1$ .

## Решения

**12.1.** По теореме синусов  $\sin \gamma = c/2R$ , поэтому  $S = (ab \sin \gamma)/2 = abc/4R$ .

**12.2.** Радиусы описанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $CBD$  равны  $AB/2 \sin ADB$  и  $BC/2 \sin BDC$ . Остается заметить, что  $AB = BC$  и  $\sin ADB = \sin BDC$ .

**12.3.** По теореме синусов  $b = a \sin \beta / \sin \alpha = a \sin \beta / \sin (\beta + \gamma)$ , поэтому  $S = ab \sin \gamma / 2 = a^2 \sin \beta \sin \gamma / 2 \sin (\beta + \gamma)$ .

**12.4.** По теореме синусов  $(a + b)/c = (\sin \alpha + \sin \beta) / \sin \gamma$ . Кроме того,  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin ((\alpha + \beta)/2) \cos ((\alpha - \beta)/2) = 2 \cos (\gamma/2) \cos ((\alpha - \beta)/2)$  и  $\sin \gamma = 2 \sin (\gamma/2) \cos (\gamma/2)$ . Второе равенство доказывается аналогично.

**12.5.** В треугольнике  $A_2BC_2$  длины сторон  $A_2B$  и  $BC_2$  равны  $b \cos \gamma$  и  $b \cos \alpha$ ; прямая  $BO$  делит угол  $A_2BC_2$  на углы  $90^\circ - \gamma$  и  $90^\circ - \alpha$ . Пусть прямая  $BO$  пересекает отрезок  $A_2C_2$  в точке  $M$ . По теореме синусов  $A_2M = A_2B \sin A_2BM / \sin A_2MB = b \cos \gamma \cos \alpha / \sin C_2MB = C_2M$ .

**12.6.** Пусть  $\alpha = \angle(a, c)$ ,  $\beta = \angle(c, d)$  и  $\gamma = \angle(d, b)$ . Тогда  $(AC/AS)/(BC/BS) = \sin \alpha / \sin (\beta + \gamma)$  и  $(BD/BS)/(AD/AS) = \sin \gamma / \sin (\alpha + \beta)$ . Поэтому  $(AC \cdot BD)/(BC \cdot AD) = \sin \alpha \sin \gamma / \sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma)$ .

**12.7.** Так как  $OA/PA = \sin OPA / \sin POA$  и  $OB/PB = \sin OPB / \sin POB$ , то  $(OA/OB)/(PA/PB) = \sin POB / \sin POA$ .

**12.8.** Достаточно перемножить пять равенств вида  $D_1A/D_1B = \sin B / \sin A$ .

**12.9.** Пусть  $O$  — общая вершина данных треугольников,  $M$  и  $N$  — середины оснований,  $k$  — отношение длин оснований к высотам. Проекции оснований данных треугольников на прямую  $MN$  равны  $k \cdot OM \sin \angle OMN$  и  $k \cdot ON \sin \angle ONM$ . Остается заметить, что  $OM / \sin \angle ONM = ON / \sin \angle OMN$ .

**12.10.** По теореме синусов  $BX / \sin \angle BDX = BD / \sin \angle BXD = 2R \sin \psi / \sin \angle BXD$ . Кроме того,  $\sin \angle BDX = \sin \angle BDC = \sin \varphi$ ; величина угла  $BXD$  легко вычисляется: если точки  $C$  и  $D$  лежат по одну сторону от  $AB$ , то  $\angle BXD = \pi - \varphi - \psi$ , а если по разные, то  $\angle BXD = |\varphi - \psi|$ . Значит,  $BX = 2R \sin \varphi \sin \psi / \sin |\varphi \pm \psi|$ .

**12.11.** а) Пусть  $A_1$  — середина отрезка  $BC$ . Складывая равенства  $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot BA_1 \cos \angle BA_1A$  и  $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cos \angle CA_1A$  и учитывая, что  $\cos \angle BA_1A = -\cos \angle CA_1A$ , получаем требуемое.

б) Очевидным образом следует из задачи а).

**12.12.** По теореме косинусов  $a^2 - (b - c)^2 = 2bc(1 - \cos \alpha) = 4S(1 - \cos \alpha) / \sin \alpha = 4S \operatorname{tg}(\alpha/2)$ .

**12.13.** По теореме косинусов  $\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$ . Остается воспользоваться формулами  $\cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos \alpha) / 2$  и  $\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha) / 2$ .

**12.14.** Пусть  $\alpha$  — угол при вершине параллелограмма. По теореме косинусов  $m^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$  и  $n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ . Поэтому  $m^2 n^2 = (a^2 + b^2)^2 - (2ab \cos \alpha)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 (1 - 2 \cos^2 \alpha)$ . Значит,  $m^2 n^2 = a^4 + b^4$  тогда и только тогда, когда  $\cos^2 \alpha = 1/2$ .

**12.15.** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан  $AA_1$  и  $BB_1$ . Угол  $AMB$  прямой тогда и только тогда, когда  $AM^2 + BM^2 = AB^2$ , т. е.  $4(m_a^2 + m_b^2) / 9 = c^2$ . Согласно задаче 12.11  $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2) / 4$ .

**12.16.** Пусть  $m = C_1M$  и  $\varphi = \angle C_1MO$ . Тогда  $OC_1^2 = C_1M^2 + OM^2 - 2OM \cdot C_1M \cos \varphi$  и  $BO^2 = CO^2 = OM^2 + MC^2 + 2OM \cdot CM \cos \varphi = OM^2 + 4C_1M^2 + 4OM \cdot C_1M \cos \varphi$ . Поэтому  $BC_1^2 = BO^2 - OC_1^2 = 3C_1M^2 + 6OM \cdot C_1M \cos \varphi$ , т. е.  $c^2 = 4BC_1^2 = 12m^2 + 24OM \cdot C_1M \cos \varphi$ . Ясно также, что  $18m^2 = 2m_c^2 = a^2 + b^2 - c^2 / 2$  (см. задачу 12.11). Поэтому равенство  $a^2 + b^2 = 2c^2$  эквивалентно тому, что  $18m^2 = 3c^2 / 2$ , т. е.  $c^2 = 12m^2$ . Так как  $c^2 = 12m^2 + 24OM \cdot C_1M \cos \varphi$ , равенство  $a^2 + b^2 = 2c^2$  эквивалентно тому, что  $\angle C_1MO = \varphi = 90^\circ$ , т. е.  $CC_1 \perp OM$ .

**12.17.** Пусть вписанная окружность касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а внеписанная — в точке  $L$ . Тогда  $BC = BK + KC = r \operatorname{ctg}(\beta/2) + r \operatorname{ctg}(\gamma/2)$  и  $BC_a = BL + LC = r_a \operatorname{ctg} \angle LBO_a + r_a \operatorname{ctg} \angle LCO_a = r_a \operatorname{tg}(\beta/2) + r_a \operatorname{tg}(\gamma/2)$ . Кроме того,  $\cos(\alpha/2) = \sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$ .

Согласно задаче 3.2  $p - b = BK = r \operatorname{ctg}(\beta/2)$  и  $p - b = CL = r_a \operatorname{tg}(\gamma/2)$ .

Если вписанная окружность касается продолжений сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$ , то  $p = AP = AQ = r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ .

**12.18.** а) Согласно задаче 12.17  $p=r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)$  и  $r \operatorname{ctg}(\alpha/2)=p-a$ ;  $r \operatorname{ctg}(\beta/2)=p-b$  и  $r_a \operatorname{tg}(\beta/2)=p-c$ ;  $r_c \operatorname{tg}(\beta/2)=p-a$  и  $r_b \operatorname{ctg}(\beta/2)=p$ . Перемножая эти пары равенств, получаем требуемое.

б) Перемножая равенства  $rp=r_a(p-a)$  и  $rr_a=(p-b)(p-c)$ , получаем  $r^2p=(p-a)(p-b)(p-c)$ . Ясно также, что  $S^2=p(r^2p)$ .

в) Достаточно перемножить равенства  $rr_a=(p-b)(p-c)$  и  $r_b r_c=p(p-a)$  и воспользоваться формулой Герона.

**12.19.** Согласно задаче 12.17  $r=r_c \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2)$  и  $p=r_c \operatorname{ctg}(\gamma/2)$ .

**12.20.** Согласно задаче 12.18, а)  $r_a=rp/(p-a)$  и  $r_b=rp/(p-b)$ . Поэтому  $cr_a r_b=cr^2 p^2/((p-a)(p-b))$  и  $r_a+r_b=rpc/((p-a)(p-b))$ , а значит,  $cr_a r_b/(r_a+r_b)=rp=S$ .

**12.21.** Согласно задаче 12.18, а)  $1/r_b=(p-b)/pr$  и  $1/r_c=(p-c)/pr$ . Поэтому  $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = a/pr = a/S = 2/h_a$ .

**12.22.** Легко проверить, что  $1/h_a=a/2pr$  и  $1/r_a=(p-a)/pr$ . Складывая аналогичные равенства, получаем требуемое.

**12.23.** Согласно задаче 12.18, а)  $1/((p-b)(p-c))=1/rr_a$ . Остается сложить аналогичные равенства и воспользоваться результатом задачи 12.22.

**12.24.** Согласно задаче 12.1  $4SR=abc$ . Ясно также, что

$$abc=p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)+p(p-a)(p-b)-$$

$$-(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{(p-a)}+\frac{S^2}{(p-b)}+\frac{S^2}{(p-c)}-\frac{S^2}{p}=S(r_a+r_b+r_c-r).$$

**12.25.** Согласно задаче 12.18, а)  $r_a r_b=p(p-c)$ ,  $r_b r_c=p(p-a)$  и  $r_c r_a=p(p-b)$ . Складывая эти равенства, получаем требуемое.

**12.26.** Так как  $S=rp=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$ , то выражение в правой части равно  $(p^3-(p-a)^3-(p-b)^3-(p-c)^3)/S^3=3abc/S^3$ . Остается заметить, что  $abc/S=4R$  (задача 12.1).

**12.27.** Пусть углы треугольника  $ABC$  равны  $2\alpha$ ,  $2\beta$  и  $2\gamma$ . Согласно задачам 12.36, а и 12.37, б)  $r=4R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  и  $r_a=4R \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$ . Поэтому  $(r+r_a)(4R+r-r_a)=16R^2 \sin \alpha \cdot (\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma)(1 + \sin \alpha (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma))=16R^2 \sin \alpha \cdot \cos(\beta-\gamma)(1 - \sin \alpha \cos(\beta+\gamma))=16R^2 \sin \alpha \cos(\beta-\gamma) \cos^2 \alpha$ . Остается заметить, что  $4R \sin \alpha \cos \alpha=a$  и  $4R \sin(\beta+\gamma) \cos(\beta-\gamma)=2R(\sin 2\beta + \sin 2\gamma)=b+c$ . Второе равенство доказывается аналогично.

**12.28.** Так как  $OA=r/\sin(\alpha/2)$  и  $bc=2S/\sin \alpha$ , то  $OA^2/bc=r^2 \operatorname{ctg}(\alpha/2)/S=r(p-a)/S$  (см. задачу 12.17, в). Остается заметить, что  $r(p-a+p-b+p-c)=rp=S$ .

**12.29.** Решим сразу задачу б), частным случаем которой является задача а). Так как  $\operatorname{ctg}(\varphi/2)=\sin \varphi/(1-\cos \varphi)$ , то  $p^2(1-x)^2=(1-x^2)(2R(1-x)+r)^2$ , где  $x=\cos \varphi$ . Корень  $x_0=1$  этого уравнения нас не интересует, так как в этом случае  $\operatorname{ctg}(\varphi/2)$  был бы не определен; поэтому, сократив обе части уравнения на  $1-x$ , придем



к кубическому уравнению. Используя результаты задач 12.38, 12.41, б) и 12.39, б), можно проверить, что это уравнение совпадает с уравнением  $(x - \cos \alpha)(x - \cos \beta)(x - \cos \gamma) = 0$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы треугольника. Значит, косинус угла  $\varphi$  равен косинусу одного из углов треугольника; кроме того, косинус монотонен на интервале от 0 до  $\pi$ .

**12.30.** Ясно, что  $2pr = 2S = ab \sin \gamma = abc/2R$ , т. е.  $4prR = abc$ . Для доказательства второго равенства воспользуемся формулой Герона:  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ , т. е.  $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc = -p^3 + p(ab+bc+ca) - 4prR$ . Сокращая на  $p$ , получаем требуемое.

**12.31.** Так как  $abc = 4RS$  (задача 12.1), то выражение в левой части равно  $(c+a+b)/4 \cdot \dot{RS} = 2p/4Rpr = 1/2Rr$ .

**12.32.** Достаточно заметить, что  $(p-c)/p = r/r_c$  (задача 12.18, а),  $r = c \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) / \cos(\gamma/2)$  и  $r_c = c \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) / \cos(\gamma/2)$  (задача 12.17).

**12.33.** Согласно задаче 12.1  $S = abc/4R$ . С другой стороны,  $S = ah_a/2$ . Поэтому  $h_a = bc/2R$ .

**12.34.** Так как  $ah_a = 2S = 2(p-a)r_a$  и  $r_a/a = \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \cos(\alpha/2)$  (задача 12.17, б), то  $h_a = 2(p-a) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \cos(\alpha/2)$ . Учитывая, что  $(p-a) \operatorname{ctg}(\beta/2) = r_c = (p-b) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$  (задача 12.17, в), получаем  $h_a = 2(p-b) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2) / \sin(\alpha/2)$ .

**12.35.** а) Пусть продолжение биссектрисы  $AD$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $M$ . Тогда  $AD \cdot DM = BD \cdot DC$  и, так как  $\triangle ABD \sim \triangle AMC$ ,  $AB \cdot AC = AD \cdot AM = AD(AD + DM) = AD^2 + BD \cdot DC$ . Кроме того,  $BD = ac/(b+c)$  и  $DC = ab/(b+c)$ . Значит,  $AD^2 = bc - bca^2/(b+c)^2 = 4p(p-a)bc/(b+c)^2$ .

б) См. решение задачи 4.47.

в) Пусть  $AD$  — биссектриса,  $AH$  — высота треугольника  $ABC$ . Тогда  $AH = c \sin \beta = 2R \sin \beta \sin \gamma$ . С другой стороны,  $AH = AD \sin \angle ADH = l_a \sin(\beta + (\alpha/2)) = l_a \sin((\pi + \beta - \gamma)/2) = l_a \cos((\beta - \gamma)/2)$ .

г) Учитывая, что  $p = 4R \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)$  (задача 12.36, в) и  $\sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin((\beta + \gamma)/2) \cos((\beta - \gamma)/2) = 2 \cos(\alpha/2) \cos((\beta - \gamma)/2)$ , приходим к формуле задачи в).

**12.36.** а) Пусть  $O$  — центр вписанной окружности,  $K$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AB$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2R \sin \gamma = AB = AK + KB &= r(\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)) = \\ &= r \sin((\alpha + \beta)/2) (\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2)). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sin \gamma = 2 \sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2)$  и  $\sin((\alpha + \beta)/2) = \cos(\gamma/2)$ , получаем требуемое.

б) Согласно задаче 3.2  $p-a = AK = r \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ . Аналогично  $p-b = r \operatorname{ctg}(\beta/2)$  и  $p-c = r \operatorname{ctg}(\gamma/2)$ . Перемножая эти равенства и учитывая, что  $p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 = (pr)^2$ , получаем требуемое.

в) Очевидным образом следует из задач а) и б).

**12.37.** а) Перемножая равенства  $r \cos(\alpha/2)/\sin(\alpha/2) = p - a$  и  $\sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) = r/4R$  (см. задачи 12.17, в) и 12.36, а), получаем требуемое.

б) Согласно задаче 12.17, в)  $r_a \operatorname{tg}(\gamma/2) = p - b = r \operatorname{ctg}(\beta/2)$ . Умножая это равенство на равенство  $r/4R = \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2)$ , получаем требуемое.

**12.38.** Складывая равенства  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$  и  $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = -2 \cos^2((\alpha + \beta)/2) + 1$  и учитывая, что  $\cos((\alpha - \beta)/2) - \cos((\alpha + \beta)/2) = 2 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2)$ , получаем  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2) + 1 = \frac{r}{R} + 1$  (см. задачу 12.36, а).

**12.39.** а) Складывая равенства  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta)$  и  $\cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1 = -2 \cos \gamma \cos(\alpha + \beta) - 1$  и учитывая, что  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ , получаем требуемое.

б) Достаточно подставить выражения вида  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  в равенство, полученное в задаче а).

**12.40.** Складывая равенства  $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \gamma \cos(\alpha - \beta)$  и  $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma = -2 \sin \gamma \cos(\alpha + \beta)$  и учитывая, что  $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$ , получаем требуемое.

**12.41.** а) Ясно, что  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = (a^2 + b^2 + c^2)/4R$  и  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 4p^2 - 2(r^2 + p^2 + 4rR)$  (см. задачу 12.30).

б) Согласно задаче 12.39, б)  $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2$ . Остается воспользоваться результатом задачи а).

**12.42.** Теорему косинусов можно переписать в виде  $ab \cos \gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/2$ . Складывая три аналогичных равенства, получаем требуемое.

**12.43.** Согласно задаче 12.13  $\cos^2(\alpha/2)/a = p(p - a)/abc$ . Остается заметить, что  $p(p - a) + p(p - b) + p(p - c) = p^2$  и  $abc = 4SR = 4prR$ .

**12.44.** а) Так как  $bc \cos \alpha = 2S \operatorname{ctg} \alpha$ , то  $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} \alpha$ . Складывая три аналогичных равенства, получаем требуемое.

б) Для остроугольного треугольника  $a^2 \operatorname{ctg} \alpha = 2R^2 \sin 2\alpha = 4S_{\text{вост}}$ , где  $O$  — центр описанной окружности. Остается сложить три аналогичных равенства. Для треугольника с тупым углом  $\alpha$  величину  $S_{\text{вост}}$  нужно взять со знаком минус.

**12.45.** Согласно задаче 12.17  $\operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2) = c/r$  и  $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2) = c/r_c$ . Остается сложить такие равенства для всех пар углов треугольника.

**12.46.** Ясно, что  $\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)/(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$ . Домножая обе части на  $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ , получаем требуемое.

$$\mathbf{12.47.} \quad \operatorname{tg}(\gamma/2) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = [1 - \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2)] [\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2)].$$

Остается домножить обе части на  $\operatorname{tg}(\alpha/2) + \operatorname{tg}(\beta/2)$ .

**12.48.** а) Домножим обе части равенства на  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Дальнейший ход доказательства таков:  $\cos \gamma (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) + \sin \gamma (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \cos \gamma \sin (\alpha + \beta) + \sin \gamma \cos (\alpha + \beta) = \cos \gamma \sin \gamma - \sin \gamma \cos \gamma = 0$ .

б) Домножим обе части равенства на  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Дальнейший ход доказательства таков:  $\cos \alpha (\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma) + \sin \alpha (\cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

**12.49.** Так как  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  (см. задачу 12.39, б) и  $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ , остается проверить, что  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha$ . Последнее равенство доказано в решении задачи 12.48, а).

**12.50.** Пусть  $A$  и  $B$  — вершины углов  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $P$  — точка пересечения несовпадающих сторон этих углов,  $Q$  — общая точка данных окружностей, лежащая на отрезке  $PA$ . Треугольник  $AQB$  равнобедренный, поэтому  $\angle PQB = 2\alpha$ . А так как  $\angle PQB + \angle QPB = \beta + \angle QBA$ , то  $\beta = 3\alpha$ .

**12.51.** Согласно задаче 4.47  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \cos(\alpha/2)/l_a$ , поэтому  $\cos(\alpha/2) =$

$= 1/2$ , т. е.  $\alpha = 120^\circ$ .

**12.52.** Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MD$  на прямую  $BC$ . Тогда  $MD = AH/2 = BM/2$ . В прямоугольном треугольнике  $BDM$  катет  $MD$  равен половине гипотенузы  $BM$ . Поэтому  $\angle MBC = \angle MBD = 30^\circ$ .

**12.53.** Величины  $AD \cdot BC \sin ADB$  и  $BE \cdot AC \sin AEB$  равны, так как они равны удвоенной площади треугольника  $ABC$ . Поэтому  $\sin ADB = \sin AEB$ . Возможны два случая.

1.  $\angle ADB = \angle AEB$ ; в этом случае точки  $A, E, D, B$  лежат на одной окружности, поэтому  $\angle EAD = \angle EBD$ , т. е.  $\angle A = \angle B$ , чего не может быть по условию.

2.  $\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$ ; в этом случае  $\angle ECD + \angle EOD = 180^\circ$ , где  $O$  — точка пересечения биссектрис. Так как  $\angle EOD = 90^\circ + \angle C/2$  (задача 5.3), то  $\angle C = 60^\circ$ .

**12.54.** Пусть  $B'$  — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку  $AC$  с прямой  $AB$ . Тогда  $AB' = CB'$  и  $\angle AB'C = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$ . Поэтому  $AB' = CB' = 2CH = AB$ , т. е.  $B' = B$  и  $\angle B = 30^\circ$ .

**12.55.** Ясно, что  $AKDM$  — прямоугольник и  $L$  — точка пересечения его диагоналей. Так как  $AD \perp BC$  и  $AM \perp BA$ , то  $\angle DAM = \angle ABC$ . Аналогично  $\angle KAD = \angle ACB$ . Опустим из точки  $A$  перпендикуляр  $AP$  на прямую  $KM$ . Пусть для определенности  $\angle B < \angle C$ . Тогда точка  $P$  лежит на отрезке  $KL$ . Из подобия треугольников  $AKP$  и  $MKA$  получаем  $AK:AP = MK:MA$ . Поэтому  $AK \cdot AM = AP \cdot MK = AP \cdot AD = 2AP \cdot AL$ . По условию  $AL^2 = AK \cdot AM$ , следовательно,  $AL = 2AP$ , т. е.  $\angle ALP = 30^\circ$ . Ясно, что  $\angle KMA = \angle ALP/2 = 15^\circ$ . Поэтому острые углы треугольника  $ABC$  равны  $15$  и  $75^\circ$ .

**12.56.** Пусть  $CD$  — биссектриса. Тогда  $BD = ac/(a+b)$ . С другой стороны,  $\triangle BDC \sim \triangle BCA$ , поэтому  $BD:BC = BC:BA$ , т. е.  $BD = a^2/c$ .

Следовательно,  $c^2 = a(a+b) = 3a^2$ . Стороны треугольника  $ABC$  равны  $a$ ,  $2a$  и  $\sqrt{3}a$ , поэтому его углы равны  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  и  $60^\circ$ .

12.57. Пусть  $\angle ABC = 2x$ , тогда внешний угол  $A$  треугольника  $ABE$  равен  $\angle ABE + \angle AEB = x + \alpha$ . Далее,  $\angle KAE = \angle BAE - \angle BAK = (180^\circ - x - \alpha) - (180^\circ - 2x - 2\alpha) = x + \alpha$ . Следовательно,  $AE$  — биссектриса внешнего угла  $A$  треугольника  $ABK$ . А так как  $BE$  — биссектриса внутреннего угла  $B$  этого треугольника, то  $E$  — центр его вневписанной окружности, касающейся стороны  $AK$ . Поэтому  $\angle AKE = \angle AKC/2 = 90^\circ - \alpha$ .

12.58. Пусть  $A_1 \dots A_{18}$  — правильный восемнадцатигульник. В качестве треугольника  $ABC$  можно взять треугольник  $A_{14}A_1A_9$ . Согласно задаче 6.59,б) диагонали  $A_1A_{12}$ ,  $A_2A_{14}$  и  $A_9A_{18}$  пересекаются в одной точке, поэтому  $\angle AMC = (\sphericalangle A_{18}A_2 + \sphericalangle A_9A_{14})/2 = 70^\circ$ .

12.59. Пусть  $A_1 \dots A_{18}$  — правильный восемнадцатигульник,  $O$  — его центр. В качестве треугольника  $ABC$  можно взять треугольник  $A_1OA_{18}$ . Диагонали  $A_2A_{14}$  и  $A_{18}A_6$  симметричны относительно диаметра  $A_1A_{10}$ , а диагональ  $A_2A_{14}$  проходит через точку пересечения диагоналей  $A_1A_{12}$  и  $A_9A_{18}$  (см. решение предыдущей задачи), поэтому  $\angle ADE = (\sphericalangle A_1A_2 + \sphericalangle A_{12}A_{14})/2 = 30^\circ$ .

12.60. Поскольку  $\angle BDE = 50^\circ$  и  $\angle CED = 30^\circ$ , то  $\angle BOC = \angle EOD = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ$ . Будем считать, что фиксированы диаметры  $BB'$  и  $CC'$  окружности, причем  $\angle BOC = 100^\circ$ , а точка  $A$  движется по дуге  $B'C'$ . Пусть  $D$  — точка пересечения  $BB'$  и  $AC$ ,  $E$  — точка пересечения  $CC'$  и  $AB$  (рис. 140).

Так как при движении точки  $A$  от  $B'$  к  $C'$  отрезок  $OE$  увеличивается, а  $OD$  уменьшается, то угол  $OED$  убывает, а угол  $ODE$  возрастает. Поэтому существует единственное положение точки  $A$ , при котором  $\angle CED = \angle OED = 30^\circ$  и  $\angle BDE = \angle ODE = 50^\circ$ .

Докажем теперь, что треугольник  $ABC$  с углами  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$  обладает требуемым свойством. Пусть  $A_1 \dots A_{18}$  — правильный восемнадцатигульник. В качестве треугольника  $ABC$  можно взять треугольник  $A_2A_{14}A_9$ . Диагональ  $A_1A_{12}$  проходит через точку  $E$  (см. решение задачи 12.58). Пусть  $F$  — точка пересечения прямых  $A_1A_{12}$  и  $A_5A_{14}$ ; прямая  $A_9A_{16}$  симметрична прямой  $A_1A_{12}$  относительно прямой  $A_5A_{14}$ , поэтому она проходит через точку  $F$ . В треугольнике  $CDF$  луч  $CE$  является биссектрисой угла  $C$ , а прямая  $FE$  — биссектрисой внешнего угла при вершине  $F$ . Поэтому  $DE$  — биссектриса угла  $ADB$ , т. е.  $\angle ODE = (\sphericalangle A_2A_{14} + \sphericalangle A_5A_9)/4 = 50^\circ$ .

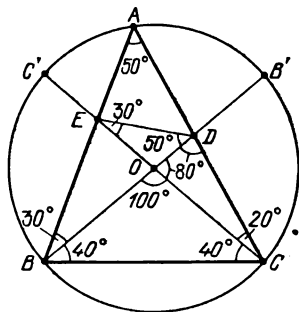


Рис. 140

**12.62.** Пусть  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно. Точки  $P$  и  $Q$  являются точками касания вписанной окружности со сторонами  $BC$  и  $CD$ . Поэтому достаточно проверить, что  $PF + GQ = FG$ . В самом деле, если  $F'G'$  — отрезок, параллельный  $FG$  и касающийся вписанной окружности, то  $PF' + G'Q = F'G'$ , поэтому  $F' = F$  и  $G' = G$ .

**12.63.** Обозначим вершины квадратов так, как показано на рис. 141. Пусть  $O$  — центр окружности,  $H$  — середина данной хорды,  $K$  — середина отрезка  $AA_1$ . Так как  $\operatorname{tg} \angle AHB = 2 = \operatorname{tg} \angle A_1HD_1$ , то точка  $H$  лежит на прямой  $AA_1$ . Пусть  $\alpha = \angle AHB = \angle A_1HD_1$ . Тогда  $AB - A_1D_1 = (AH - A_1H) \cdot \sin \alpha = 2KH \sin \alpha = 2OH \sin^2 \alpha$ . Поскольку  $\operatorname{tg} \alpha = 2$  и  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ , то  $\sin^2 \alpha = 4/5$ . Поэтому разность длин сторон квадратов равна  $8h/5$ .

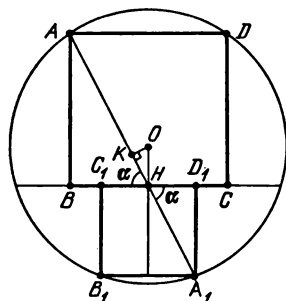


Рис. 141

Так как  $BM^2 = (2a^2 + 2c^2 - b^2)/4$  (см. задачу 12.11,а), то  $9x^2 = (2a^2 + 2c^2 - 4a^2)/4 = (c^2 - a^2)/2$ . Пусть  $P$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ . Тогда  $BP = (a + c - b)/2 = (c - a)/2$ . С другой стороны, по свойству касательной  $BP^2 = BK \cdot BL$ , т. е.  $BP^2 = 2x^2$ . Поэтому  $2x^2 = ((c - a)/2)^2$ . Перемножая равенства  $9x^2 = (c^2 - a^2)/2$  и

$((c-a)/2)^2 = 2x^2$ , получаем  $(c+a)/(c-a) = 9/4$ , т. е.  $c:a = 13:5$ . В итоге получаем, что  $a:b:c = 5:10:13$ .

**12.65.** Пусть  $2a$  и  $2b$  — длины сторон первого и второго квадратов. Тогда расстояние от центра окружности до вершин второго квадрата, лежащих на окружности, равно  $\sqrt{(a+2b)^2 + b^2}$ . С другой стороны, это расстояние равно  $\sqrt{2}a$ . Следовательно,  $(a+2b)^2 + b^2 = 2a^2$ , т. е.  $a = 2b \pm \sqrt{4b^2 + 5b^2} = (2 \pm 3)b$ . Нам подходит только решение  $a = 5b$ .

**12.66.** Пусть  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $AC$  и  $AB$ ,  $R$  — центр окружности  $S_1$ ;  $a = AC/2$ ,  $b = BC/2$ ,  $x$  — радиус окружности  $S_1$ . Легко проверить, что  $PR = a + x$ ,  $QR = a + b - x$  и  $PQ = b$ . Проведем в треугольнике  $PQR$  высоту  $RH$ . Расстояние от точки  $R$  до прямой  $CD$  равно  $x$ , поэтому  $PH = a - x$ , а значит,  $QH = |b - a + x|$ . Следовательно,  $(a+x)^2 - (a-x)^2 = RH^2 = (a+b-x)^2 - (b-a+x)^2$ , т. е.  $ax = b(a-x)$ . В итоге получаем  $x = ab/(a+b)$ . Для радиуса окружности  $S_2$  получаем точно такое же выражение.

**12.67.** Пусть  $x$  — радиус окружности  $S$ , касающейся окружностей  $S_1$  и  $S_2$  и луча  $AB$ ,  $y$  — радиус окружности  $S'$ , касающейся окружностей  $S_2$  и  $S_3$  и луча  $BA$ . Положение окружности, касающейся окружностей  $S_1$  и луча  $AB$  (соответственно  $S_3$  и  $BA$ ) однозначно определяется ее радиусом, поэтому достаточно проверить, что  $x = y$ .

Приравнявая два выражения для квадрата расстояния от центра окружности  $S$  до прямой  $AD$ , получаем  $(x+1)^2 - (x-1)^2 = (3+x)^2 - (5-x)^2$ , т. е.  $x = 4/3$ .

Рассматривая окружности  $S_2$  и  $S_3$ , легко проверить, что  $AB^2 = (3+4)^2 - 1^2 = 48$ . С другой стороны, квадраты расстояний от центра окружности  $S'$  до прямых  $AD$  и  $BC$  равны  $(y+3)^2 - (5-y)^2 = 16(y-1)$  и  $(4+y)^2 - (4-y)^2 = 16y$  соответственно. Следовательно,  $4\sqrt{y-1} + 4\sqrt{y} = \sqrt{48}$ , т. е.  $y = 4/3$ .

**12.68.** Если углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, то они равны  $\alpha - \gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha + \gamma$ , где  $\gamma \geq 0$ . Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то  $\alpha = 60^\circ$ . Стороны этого треугольника равны  $2R \sin(\alpha - \gamma)$ ,  $2R \sin \alpha$ ,  $2R \sin(\alpha + \gamma)$ . Поскольку против большего угла лежит большая сторона, то  $\sin(\alpha - \gamma) \leq \sin \alpha \leq \sin(\alpha + \gamma)$ .

а) Если числа  $\sin(\alpha - \gamma) \leq \sin \alpha \leq \sin(\alpha + \gamma)$  образуют арифметическую прогрессию, то  $\sin \alpha = (\sin(\alpha + \gamma) + \sin(\alpha - \gamma))/2 = \sin \alpha \cos \gamma$ , т. е.  $\cos \gamma = 1$ , или  $\gamma = 0$ . Следовательно, все углы треугольника равны  $60^\circ$ .

б) Если числа  $\sin(\alpha - \gamma) \leq \sin \alpha \leq \sin(\alpha + \gamma)$  образуют геометрическую прогрессию, то  $\sin^2 \alpha = \sin(\alpha - \gamma) \sin(\alpha + \gamma) = \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma$ . Поэтому  $\cos \gamma = 1$ , т. е. все углы треугольника равны  $60^\circ$ .

**12.69.** Построим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCE$  (рис. 142). Пусть  $BC = x$  и  $AD = y$ . Тогда  $(b-a)h = 2S_{AED} = xy \sin 45^\circ$  и  $(b-a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ = x^2 + y^2 - 2xy \sin 45^\circ$ . По теореме Пифагора  $a^2 + b^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) = (BO^2 + CO^2) + (DO^2 + AO^2) = x^2 + y^2$ . Следовательно,  $(b-a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \sin 45^\circ = a^2 + b^2 - 2(b-a)h$ , т. е.  $h = ab/(b-a)$ .

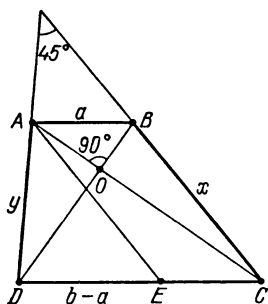


Рис. 142

**12.70.** Так как  $BK = (a + c - b)/2$  и  $KC = (a + b - c)/2$  (см. задачу 3.2), то  $BK \cdot KC = (a^2 - (b - c)^2)/4 = S \operatorname{tg}(\alpha/2)$  (см. задачу 12.12).

**12.71.** Так как  $(b + c)/a = \cos((\beta - \gamma)/2)/\sin(\alpha/2)$  (задача 12.4), то  $\cos((\beta - \gamma)/2) = \cos(\alpha/2)$ , т. е.  $\beta - \gamma = \pm \alpha$ . Если  $\beta = \gamma + \alpha$ , то  $\beta = 90^\circ$ , а если  $\beta + \alpha = \gamma$ , то  $\gamma = 90^\circ$ .

**12.72.** Легко проверить, что  $S_{ABC} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Аналогично  $S_{A_1B_1C_1} = 2R^2 \sin((\beta + \gamma)/2) \sin((\alpha + \gamma)/2) \cdot \sin((\alpha + \beta)/2) = 2R^2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)$ . Поэтому  $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = 8 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \cdot \sin(\gamma/2) = 2r/R$  (см. задачу 12.36,а).

**12.73.** Сумма котангенсов углов треугольника равна  $(a^2 + b^2 + c^2)/4S$  (задача 12.44,а). Кроме того,  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)/4$  (задача 12.11,б) и площадь треугольника, составленного из медиан треугольника  $ABC$ , равна  $3/4$  площади треугольника  $ABC$  (задача 1.36).

**12.74.** Одна из точек  $A_i$  лежит внутри треугольника, образованного тремя другими точками, поэтому можно считать, что треугольник  $A_1A_2A_3$  остроугольный (или прямоугольный). Числа  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  легко находятся из соответствующей системы уравнений; в результате получаем  $\lambda_1 = (b^2 + c^2 - a^2)/2$ ,  $\lambda_2 = (a^2 + c^2 - b^2)/2$  и  $\lambda_3 = (a^2 + b^2 - c^2)/2$ , где  $a = A_2A_3$ ,  $b = A_1A_3$  и  $c = A_1A_2$ . Согласно задаче 5.45,б)  $A_1A_4^2 = 4R^2 - a^2$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $A_1A_2A_3$ . Поэтому  $\lambda_4 = A_1A_4^2 - \lambda_1 = 4R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/2 = A_2A_4^2 - \lambda_2 = A_3A_4^2 - \lambda_3$ .

Проверим теперь, что  $\sum 1/\lambda_i = 0$ . Так как  $(b^2 + c^2 - a^2)/2 = bc \cos \alpha = 2S \operatorname{ctg} \alpha$ , то  $1/\lambda_1 = \operatorname{tg} \alpha / 2S$ . Остается заметить, что  $2/(a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) / 2S$  (задача 12.49).

**12.75.** Пусть  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  и  $(a_3, b_3)$  — координаты вершин треугольника. Координаты центра его описанной окружности задаются системой уравнений

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2,$$

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2.$$

Легко проверить, что эти уравнения линейные, а значит, решение рассматриваемой системы уравнений рационально.

**12.76.** Возьмем на отрезках  $AB$  и  $CD$  точки  $K$  и  $L$ , делящие их в указанных отношениях. Достаточно доказать, что точка пересечения прямых  $AK$  и  $CL$  лежит на окружности  $S$ . Введем систему координат с началом в центре  $O$  окружности  $S$  и осями  $Ox$  и  $Oy$ , направленными по лучам  $OB$  и  $OD$ . Радиус окружности  $S$  можно считать равным 1. Прямые  $AK$  и  $CL$  задаются соответственно уравнениями  $y = (x + 1)/3$  и  $y = 2x - 1$ . Поэтому их общая точка имеет координаты  $x_0 = 4/5$  и  $y_0 = 3/5$ . Ясно, что  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ .

**12.77.** Пусть  $d$ —расстояние от центра описанной окружности до образа центра вписанной окружности при рассматриваемой гомотетии. Достаточно проверить, что  $R=d+2r$ . Пусть  $(0, 0)$ ,  $(2a, 0)$  и  $(0, 2b)$  — координаты вершин данного треугольника. Тогда  $(a, b)$ —координаты центра описанной окружности,  $(r, r)$ —координаты центра вписанной окружности, причем  $r=a+b-R$ . Следовательно,  $d^2=(2r-a)^2++(2r-b)^2=a^2+b^2-4r(a+b-r)+4r^2=(R-2r)^2$ , так как  $a^2+b^2=R^2$ .

**12.78.** Рассмотрим систему координат с началом в центре квадрата и осью  $Ox$ , параллельной прямой  $l$ . Пусть вершины квадрата имеют следующие координаты:  $A(x, y)$ ,  $B(y, -x)$ ,  $C(-x, -y)$  и  $D(-y, x)$ ; прямая  $l$  задается уравнением  $y=a$ . Тогда точка  $Q$  имеет координаты  $((x+y)/2, (y-x)/2)$ , а точка  $P$  имеет координаты  $(-y, a)$ . Следовательно, искомое ГМТ состоит из точек  $(t, -t+a/2)$ , где  $t=(x-y)/4$ . Остается заметить, что величина  $x-y$  изменяется от  $-\sqrt{2(x^2+y^2)}=-AB$  до  $AB$ .



Научно-популярное издание  
*ПРАСОЛОВ Виктор Васильевич*

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Часть 1

Серия «Библиотека математического кружка»,  
выпуск 15

Заведующий редакцией *А. П. Баева*

Редактор *Т. А. Панькова*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *М. А. Смирнов, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 41282

---

Сдано в набор 12.07.90. Подписано к печати 05.05.91. Формат  
84 × 108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура таймс. Печать высокая. Усл.  
печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 19,82. Тираж 77 000 экз.  
Заказ № 96. Цена 2 руб. 50 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени  
МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета  
СССР по печати. 113054 Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с диапозитивов в типографии № 2 Министерства печати  
и массовой информации РСФСР 152901, г.Рыбинск ул. Чкалова, 10.

2 р. 50 к.